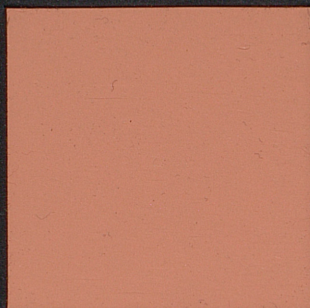
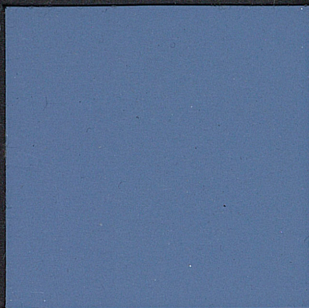
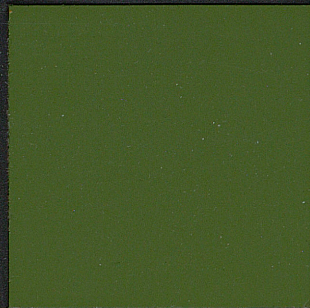
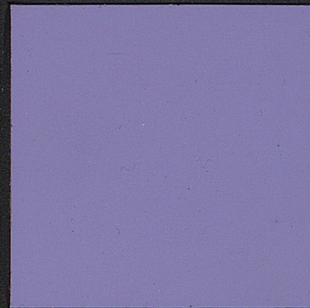
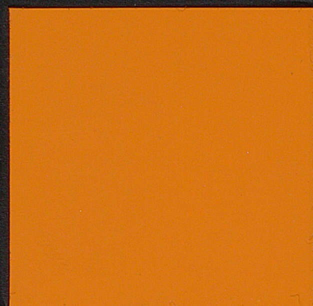
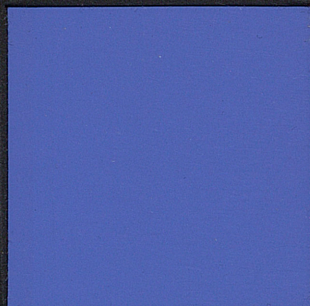
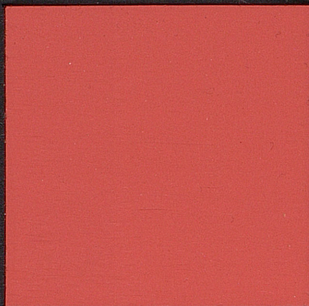
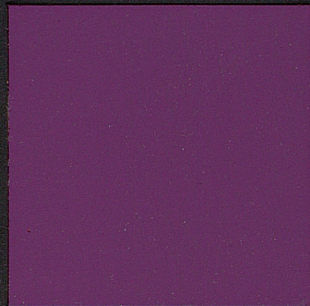
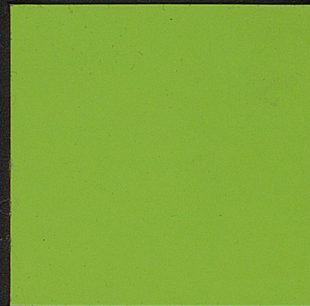
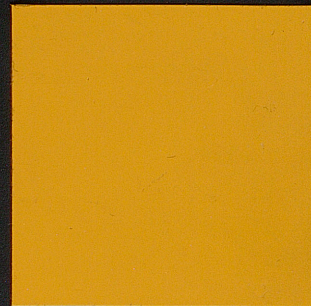
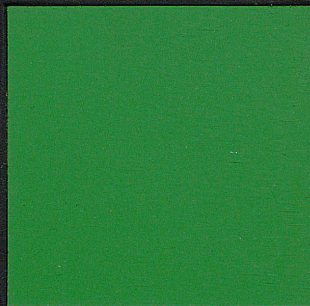
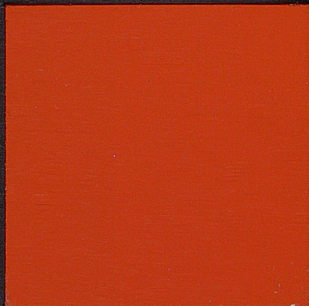
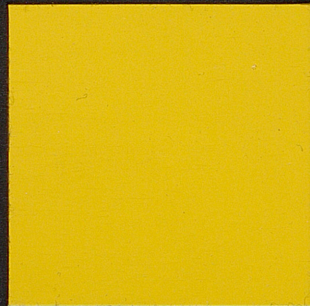
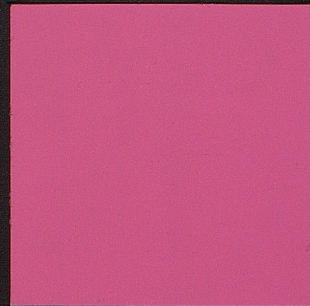
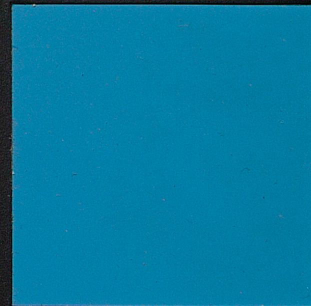
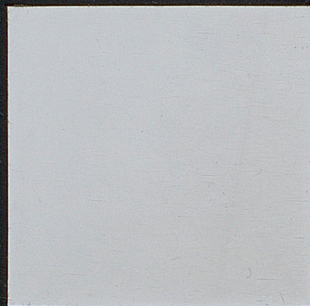
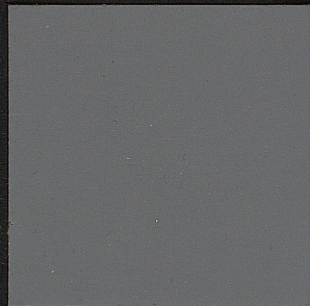
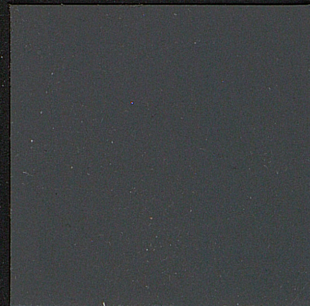
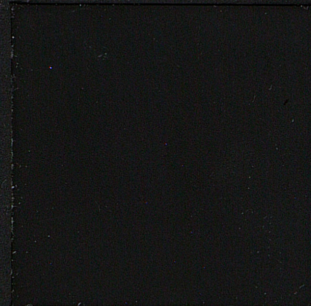
colorchecker CLASSIC



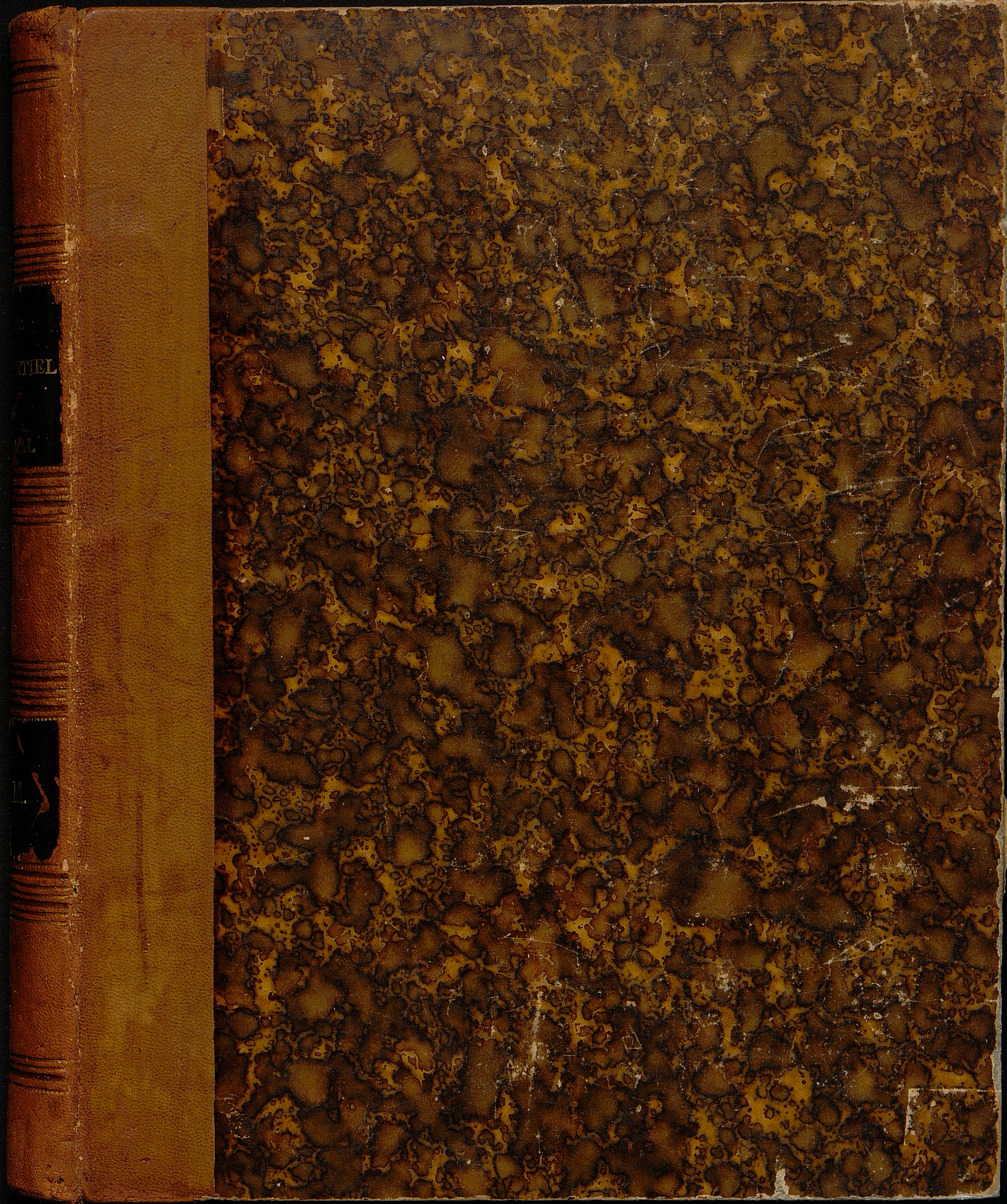




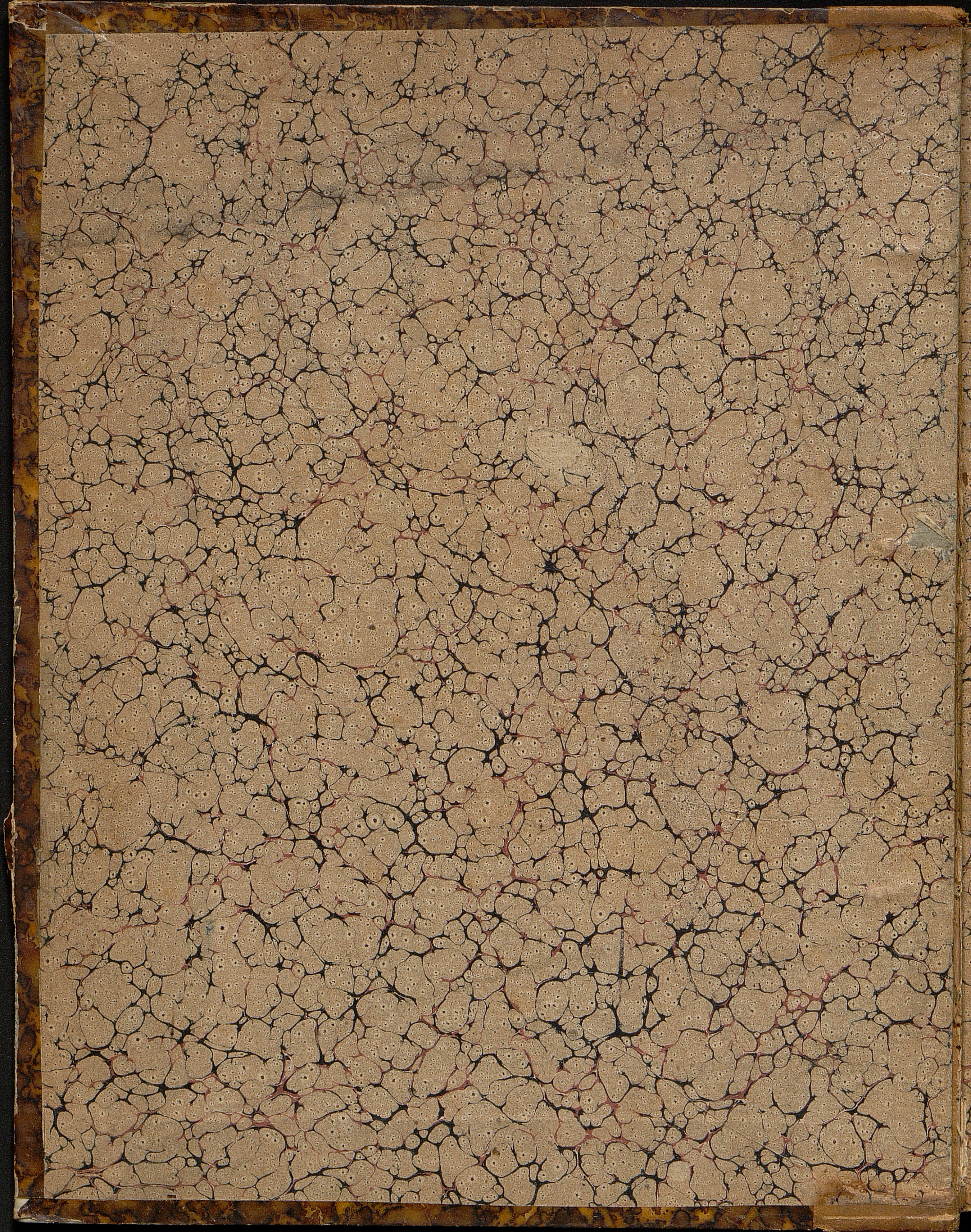
x·rite

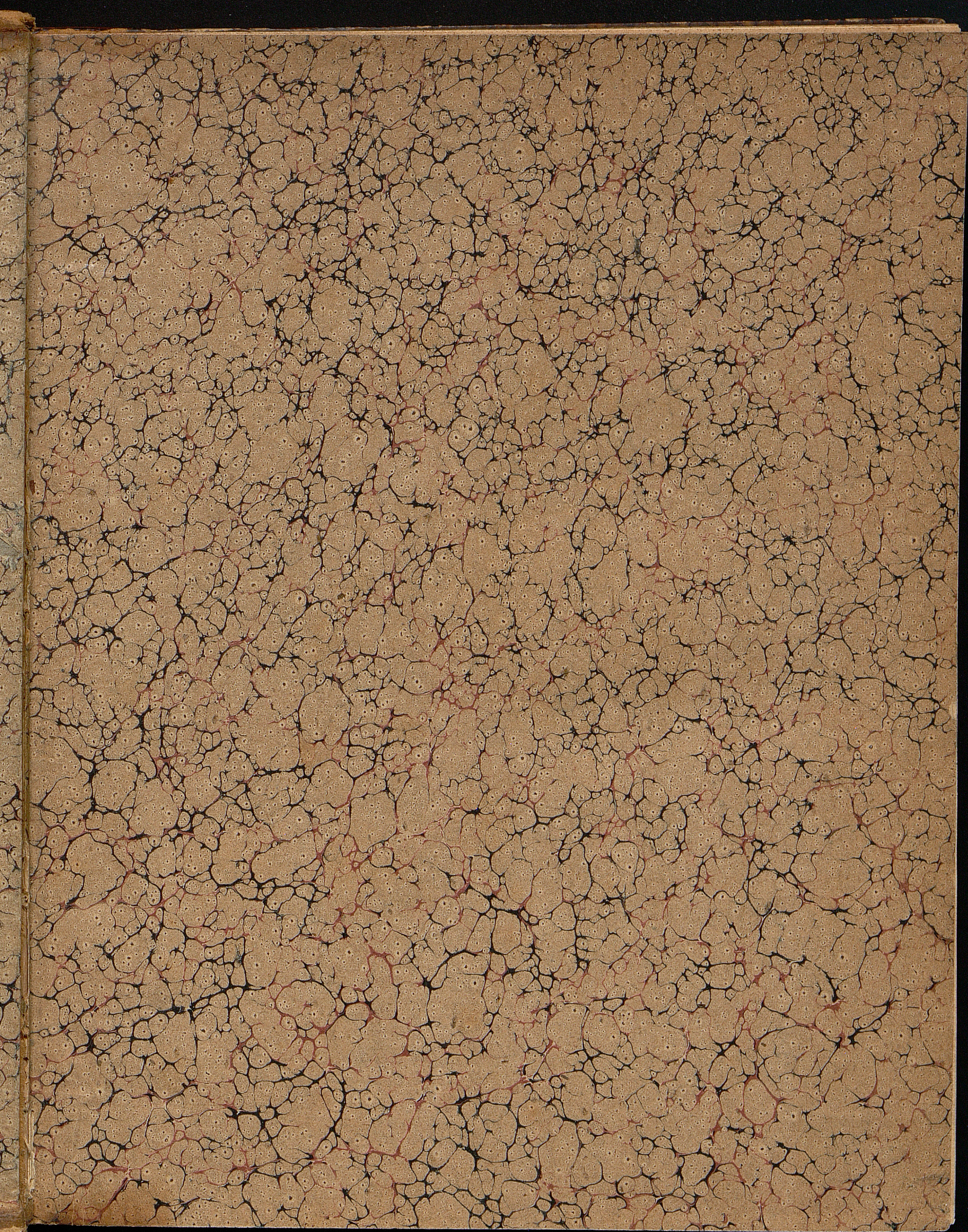
mm

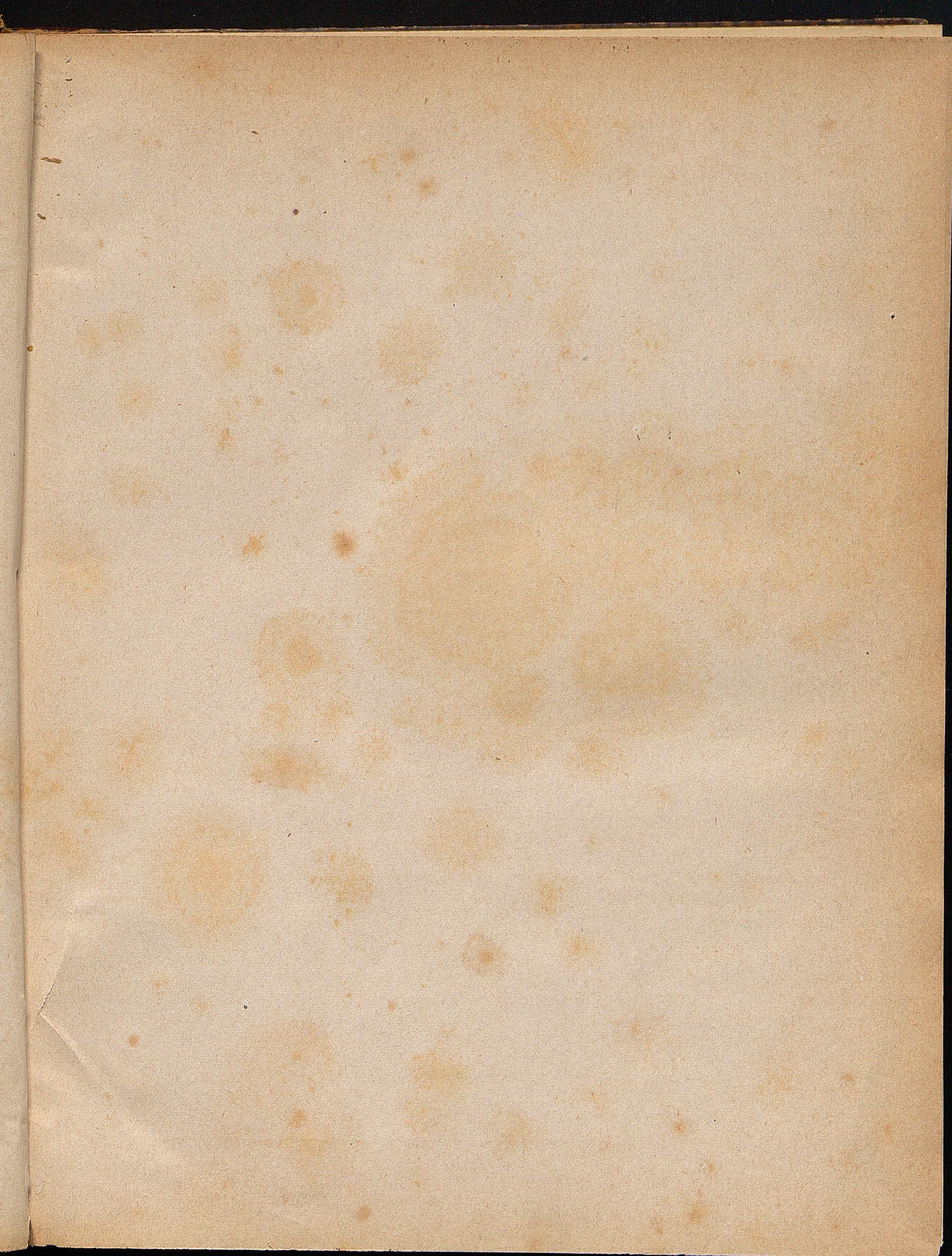
CALCUL
DIFFÉRENTIEL
ET
INTÉGRAL

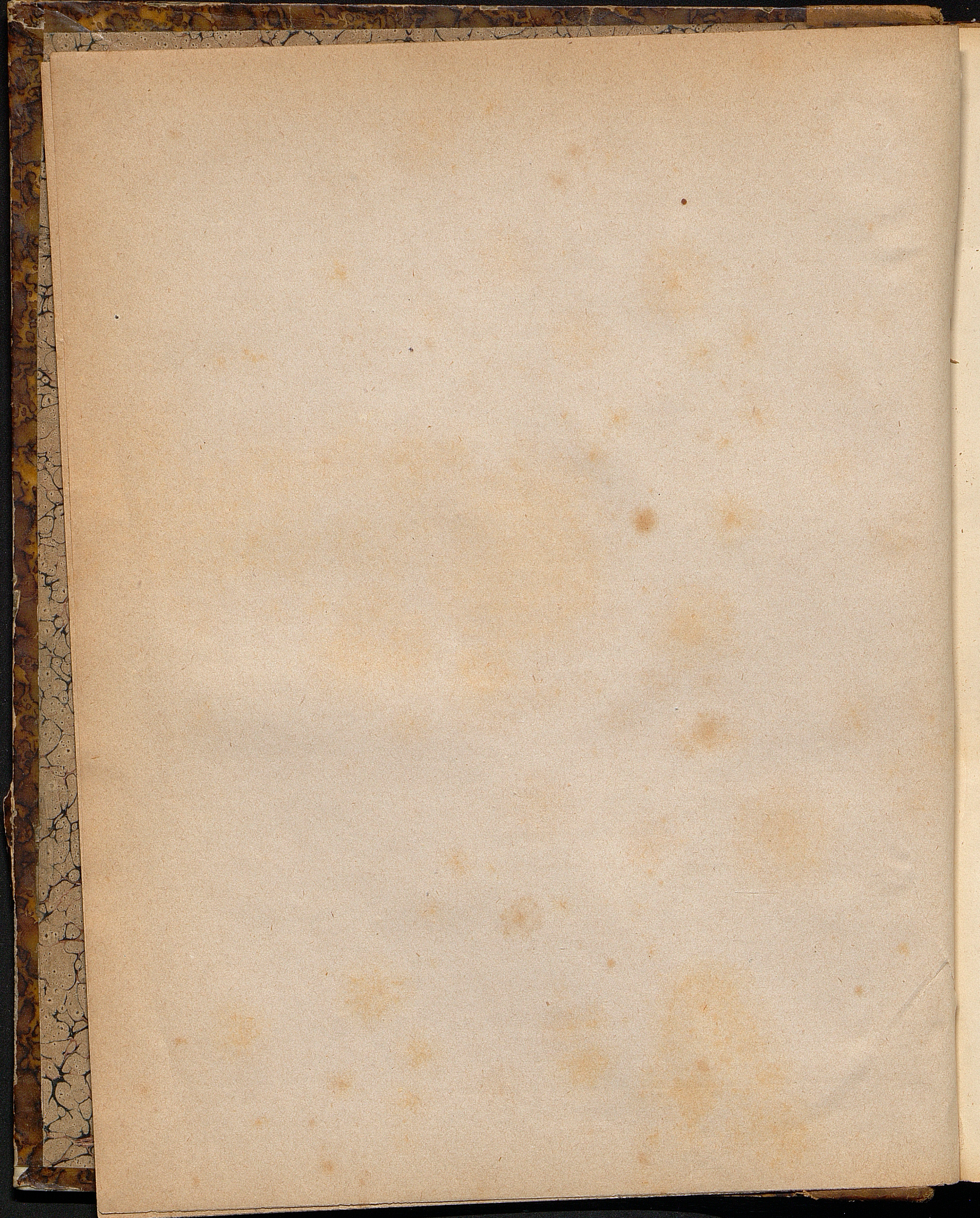
E. M.

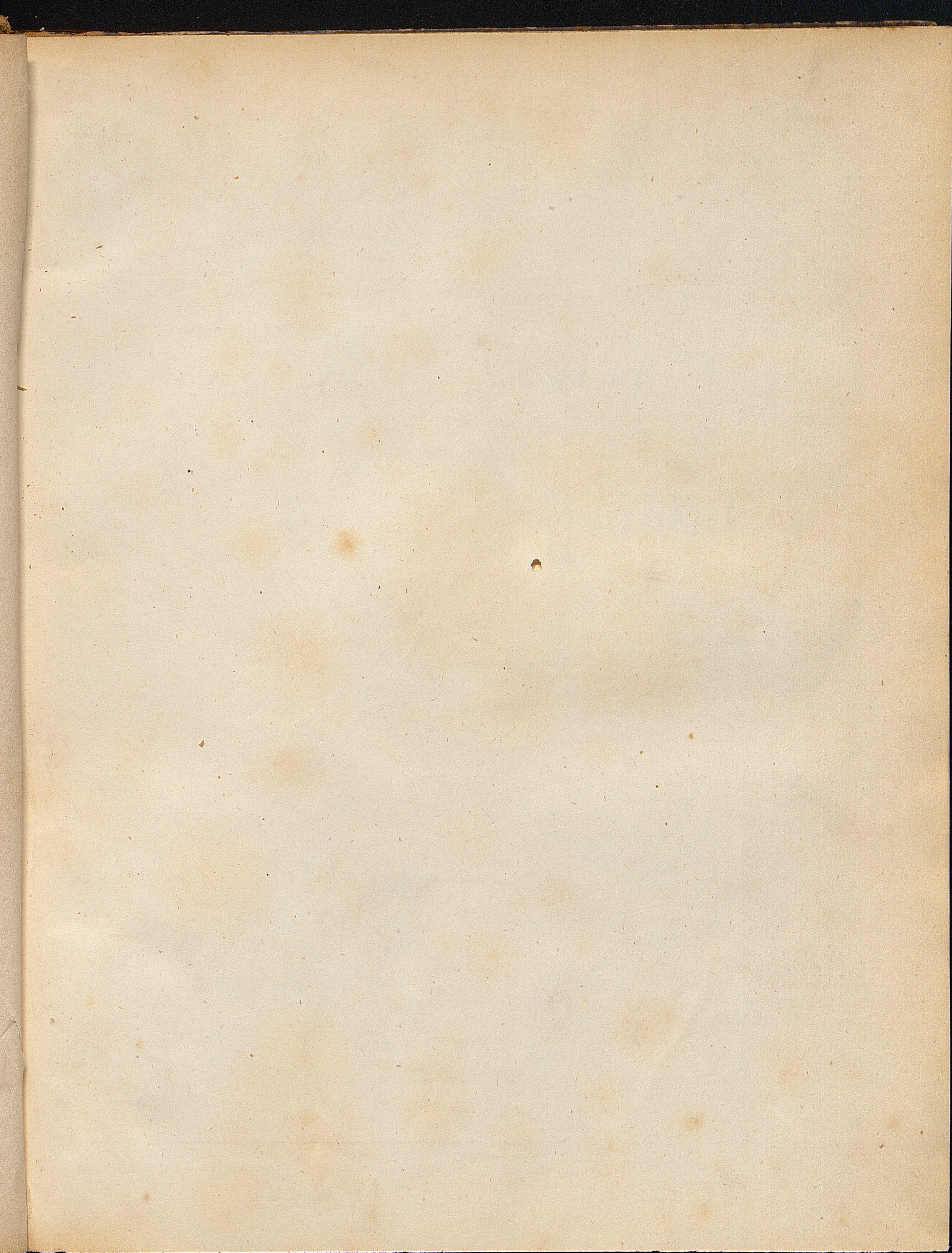


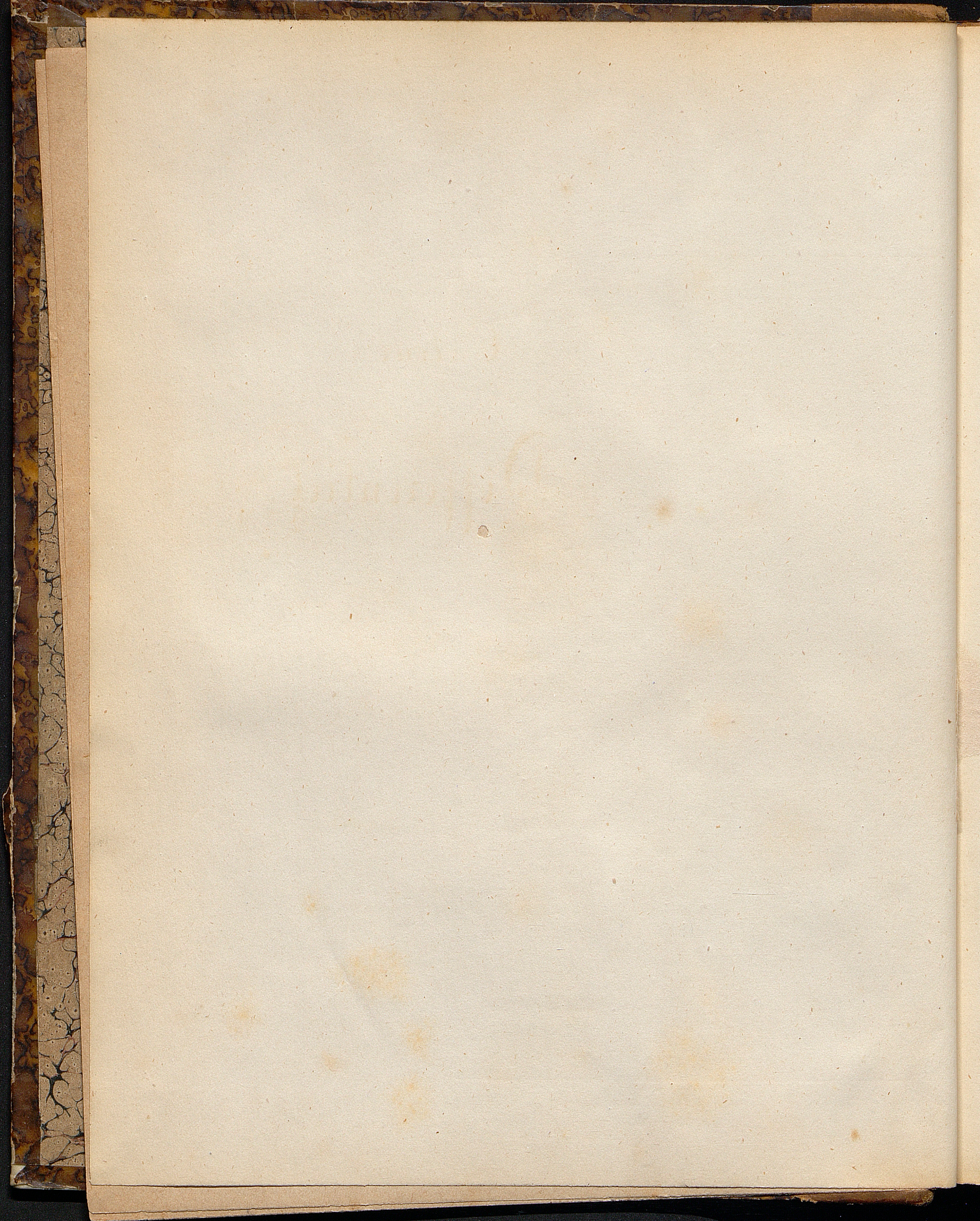












Calcul Différentiel.

École Normale, 1848-1849.

N. E. Mauduit.



Notions Préliminaires.

Deux Sortes de quantités se présentent dans l'analyse : les quantités Constantes et les Quantités Variables.

Si deux variables sont liées entre elles par une Relation telle que l'une recevant un accroissement, l'autre éprouve un changem.t d'Etat correspondant, on dit que ces deux Quantités sont Fonction l'une de l'autre. — De ces deux quantités, celle qu'on regarde spécialement comme recevant des accroissements arbitraires s'appelle la Variable Indépendante, l'autre, dont la variation dépend ainsi de celle de la première, s'appelle absolument la Fonction.

Une fonction peut dépendre d'une ou de plusieurs variables indépendantes : Ex. l'Eq. d'une courbe $y = f(x)$

" " Surface $z = f(x, y)$

Remarquons que, dans ces définitions, rien n'indique qu'on sache exprimer au moyen de signes algébriques la relation constante qui unit les deux variables. Ainsi, l'élasticité de la vapeur d'Eau est une fonction de la Température, la longueur de la circonférence est une fonction du Rayon ; bien qu'on ne connaisse pas exactement ces fonctions : on les a seulement déterminées approximativement. Cela pourrait conduire à distinguer les Fonctions Analytiques et les fonctions Empiriques.

Les premières, les seules qui nous occupent, se séparent elles-mêmes en fonctions Explicites et fonctions Implicites.

On distingue encore les fonctions algébriques et les fonctions transcendantes.

Il y a encore des fonctions de fonctions:

$$y = \text{Log Sin.} (f(x))^x$$

De la Continuité.

Une fonction est dite **Continue** entre deux limites a et b lorsque chaque valeur intermédiaire de x, α par ex., donne pour la fonction $f(x)$ une valeur $f(\alpha)$ réelle et finie, et qu'en outre, si l'on donne à x un accroissement h, la différence entre les deux états de la fonction, ou son accroissement $f(x+h) - f(x)$ converge vers zéro avec h.

Une fonction est **Discontinue** dans le cas contraire.

Ainsi les fonctions $y = \text{Tg}\,x$, $y = \text{Log}\,x$ sont discontinues parce que, pour certaines valeurs de x, elles deviennent infinies ou imaginaires.

L'autre sorte de discontinuité est plus rare: elle se rencontre alors que la fonction passe brusquement d'un état à un autre, tout en restant finie et réelle: par ex.

$$y = \frac{1}{1 + e^{\text{Tg}\,x}}$$

passe brusquement de 0 à 1 quand x, croissant, atteint et dépasse la valeur $\frac{\pi}{2}$.

Du reste, en général, les fonctions discontinues ne le sont que pour certaines valeurs particulières de la variable indépendante.

Il y en a pourtant qui le sont dans toute l'étendue de leur cours, par ex. celle-ci

$$y = (-2)^x$$

Si je fais $x = \frac{2n+1}{2p}$, y est imaginaire, et, pour $x = \frac{2p}{2n+1}$, y est réel. on voit donc ici que, entre deux valeurs très-rapprochées de x qui donnent y réel, on peut toujours trouver une infinité de valeurs de x pour lesquelles y est imaginaire.

Bien qu'il n'y ait pas d'accroissements véritables pour les fonctions imaginaires, il arrivera qu'on considère des fonctions de la forme

$$y = f(x) + \sqrt{-1}\, \varphi(x)$$

et qu'on parle de leur continuité. — Une pareille fonction est dite continue quand les deux fonctions réelles $f(x)$ et $\varphi(x)$ le sont elles-mêmes.

Des Limites et des Infiniment petits.

On appelle limite d'une quantité variable une grandeur finie dont la variable s'approche indéfiniment, de telle sorte que la différence peut devenir plus petite que toute grandeur assignable, sans cependant jamais être nulle.

On sait que

Si deux quantités variables sont constamment égales en s'approchant de leurs limites, ces limites sont les mêmes ;

Si deux quantités variables sont constamment égales dans tous leurs états de grandeur, et que l'une d'elles ait une limite, l'autre a la même limite.

En général :

Soient $F(x, y .. z)$ et $f(x, y .. z)$ deux fonctions toujours égales pour toutes les valeurs des variables $x, y, .. z$, de manière que toujours on ait $F(x, y .. z) = f(x, y .. z)$, et supposons que ces variables tendent simultanément vers de certaines valeurs limites $a, b, .. c$: je dis qu'on a

$$F(a, b, .. c) = f(a, b, .. c)$$

En effet, F et f, étant des fonctions continues, prendront des accroissements aussi petits qu'on voudra pour des accroissements extrêmement petits des variables. Si donc on conçoit que ces variables prennent des valeurs se rapprochant de plus en plus des limites $a, b, .. c$, les fonctions elles-mêmes différeront de moins en moins des valeurs $F(a, b, .. c)$, $f(a, b, .. c)$, et en différeront d'aussi peu qu'on le voudra ; de façon que ces valeurs seront leurs limites respectives. D'ailleurs, quelque près qu'elles soient de ces limites, ces fonctions sont supposées égales entre elles : donc leurs limites le sont également, et $F(a, b, .. c) = f(a, b, .. c)$ $c. q. f. d.$

Telle est la proposition fondamentale de la Théorie des Limites, qui consiste elle-même à remplacer les Quantités dont on veut trouver la Relation par d'autres plus simples, variables, et s'approchant indéfiniment des premières. On cherche la Relation qui unit ces quantités auxiliaires, et, quand on l'a trouvée, il suffit d'y remplacer chacune des variables par sa limite.

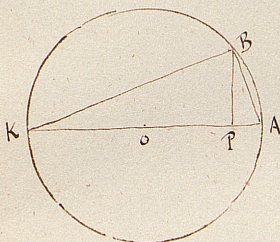
Un **Infiniment petit** est une quantité variable qui a zéro pour limite, et qu'on considère dans le voisinage de cette Limite. Un Infiniment petit n'aura donc jamais de grandeur fixe : c'est essentiellement une quantité variable.

Commençons par établir quelques principes Généraux sur les infiniment petits.

Un infiniment petit peut avoir avec un autre tel rapport que l'on veut. Ce rapport peut être fixe ou variable, peut même être infiniment petit ou infiniment grand.

Soient a et b deux infiniment petits. Quand la limite du rapport $\frac{a}{b}$ est finie, on dit que les deux infiniment petits sont du même ordre.

Si $\text{Lim.} \frac{a}{b} = 0$, alors b est dit infiniment petit par rapport à a : c'est ce qu'on appelle un *Infiniment petit du second ordre*. — ainsi, si l'on considère un arc infiniment petit AB et sa corde, cette corde est aussi infiniment petite, de même que le Sinus verse AP. Mais AP est du 2e. ordre, car



$$\frac{AP}{AB} = \frac{AB}{AK}$$

ou

$$\frac{\text{Sinus Verse}}{\text{Corde}} = \frac{\text{Corde}}{\text{Diamètre}}$$

Donc

$$\text{Lim.} \frac{\text{Sinus Verse}}{\text{Corde}} = 0$$

et le sinus verse est infiniment petit par rapport à la corde.

En général, si l'on considère plusieurs infiniment petits a, b, c, d .. tels que, l'un d'eux étant une fois fixé, tous les autres s'ensuivent ; si l'on a $\text{Lim} \frac{b}{a} = 0$, b est un infin. petit du 2e. ordre ; si $\text{Lim} \frac{c}{b} = 0$, c est un Inf. pet. du 3e. ordre, .. etc. :

Un infiniment petit d'ordre n est une quantité telle que son rapport à un infiniment petit d'ordre $n-1$ a pour limite zéro.

Si nous représentons par α un infiniment petit du premier ordre, et par A une quantité finie, l'expression $A\alpha(1 \pm \varepsilon)$

représente le type le plus général d'un inf. petit du même ordre, ε ayant zéro pour limite.

Soit maintenant x le type d'un infiniment petit du 2e ordre. on doit avoir

$$\frac{x}{\alpha} = A\alpha(1\pm\varepsilon)$$

d'où

$$x = A\alpha^2(1\pm\varepsilon)$$

De même, le type général d'un infiniment petit d'ordre n sera

$$A\alpha^n(1\pm\varepsilon)$$

Si l'on considère une somme d'infiniment petits

$$A\alpha^n(1\pm\varepsilon) + B\alpha^p(1\pm\eta) + C\alpha^q(1\pm\gamma) + \cdots$$

$n<p<q$ .. la somme de ces infiniment petits est elle-même un infiniment petit de l'ordre le moins élevé n. En effet, cette somme peut s'écrire:

$$A\alpha^n\left\{1\pm\varepsilon + \frac{B}{A}\alpha^{p-n}(1\pm\eta) + \frac{C}{A}\alpha^{q-n}(1\pm\gamma) + \cdots\right\}$$

ou

$$A\alpha^n(1\pm\delta)$$

δ ayant zéro pour limite.

Théorème. — Lorsque deux quantités a, b, sont infiniment petites, et que $\lim \frac{b}{a} = 1$, leur différence est infiniment petite par rapport à chacune d'elles.

En effet, posons

$$a = b + \delta$$

et divisons par a; il vient

$$1 = \frac{b}{a} + \frac{\delta}{a}$$

d'où

$$1 = \lim\frac{b}{a} + \lim\frac{\delta}{a}$$

$$\lim\frac{\delta}{a} = 0$$

Donc δ est infinim^t^. petit par rapport à a, et l'on

démontrerait de même qu'il l'est aussi par rapport à b.

Réciproquement, si la différence de deux quantités est infiniment petite par rapport à chacune d'elles, la limite de leur rapport est l'unité.

même démonstration.

Théorème. — La limite du rapport de deux infiniment petits a et b n'est pas changée si l'on remplace chacun d'eux par une quantité, qui n'en diffère que d'un infiniment petit d'ordre supérieur.

Soient a' et b' deux quantités qui ne diffèrent de a et de b que d'un infiniment petit d'un ordre supérieur à a et b. Je dis que

$$\text{Lim}\ \frac{a'}{b'} = \text{Lim}\ \frac{a}{b}.$$

En effet, on a par hypothèse

$$\text{Lim}\ \frac{a'}{a} = 1 \qquad \text{Lim}\ \frac{b'}{b} = 1$$

Cela posé, on a identiquement

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \cdot \frac{a'}{a} \cdot \frac{b}{b'}$$

Donc

$$\text{Lim}\ \frac{b}{a} = \text{Lim.}\ \frac{b'}{a'} \qquad \text{c q f d.}$$

Il suit de là que, dans toute question où l'on n'aura pour but que de considérer le rapport de b à a, il sera toujours permis de remplacer chacune de ces quantités par une autre dont le rapport avec la première est 1 pour limite.

Théorème. — Je considère une suite d'infiniment petits positifs

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m$$

dont le nombre m augmente indéfiniment : cette somme tendra en général vers une limite finie. Cette limite ne sera pas changée si l'on remplace chacune de ces quantités respectivement par une autre,

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_m$$

ces nouvelles quantités ne différant des précédentes que par des infiniment petits d'ordres supérieurs.

En effet, on aura alors

$$\lim \frac{a_1}{b_1} = 1$$

$$\lim \frac{a_2}{b_2} = 1$$

$$\vdots$$

$$\lim \frac{a_m}{b_m} = 1$$

Concevons que tous ces rapports soient rangés par ordre de grandeur croissante, de façon que l'on ait

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \frac{a_3}{b_3} < \cdots < \frac{a_m}{b_m}$$

on sait que

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{b_1 + b_2 + \cdots + b_m} < \frac{a_m}{b_m}$$

Cela a encore lieu à la limite. Donc

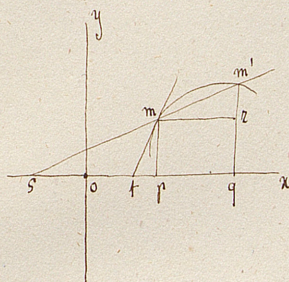
$$\lim. \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{b_1 + b_2 + \cdots + b_m} = 1$$

Donc, si le Numérateur a une Limite, le Dénominateur en a aussi une, qui est la même.

C'est sur ces principes que repose la Méthode Infinitésimale, qui abrège et simplifie beaucoup le Calcul Différentiel.

Origine et but du Calcul Différentiel.

C'est dans la Recherche des Tangentes aux Courbes planes que le Calcul Différentiel a pris son origine. — Si l'on considère un point m d'une courbe, un point m' infinim. voisin, et qu'on mène une sécante mm', lorsque m' se rapproche indéfiniment de m, la sécante ms tend indé-finiment vers la Tangente mt. Le coefficient angulaire de la Tangente n'est donc autre chose que la limite de celui de la sécante, lequel est $\frac{m'r}{mr}$, c.à.d. le rapport de l'accroissement de l'ordonnée à celui de l'abscisse. Si donc l'Eq. est $y = f(x)$, et h l'accroissement infiniment petit mr de l'abscisse, on a



$$\frac{m'r}{mr} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Donc le coefficient angulaire de la Tangente n'est autre chose que la Limite de ce dernier Rapport. Si donc nous savons en Général trouver cette Limite, à l'instant même le problème des Tangentes sera résolu. — Ainsi, voilà comment on a été amené à chercher des méthodes Générales pour trouver la limite du Rapport de l'accroissement d'une fonction quelconque à celui de la Variable; lorsque celui-ci converge vers zéro.

La Recherche de cette Limite est le premier objet du calcul différentiel.

Cette Limite, on sait déjà la trouver dans divers cas, dans celui des fonctions algébriques, par exemple. alors en effet, la limite du Rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ n'est autre chose que la Dérivée de $f(x)$. — Indé-

pendamment des fonctions algébriques, on sait encore le faire dans quelques cas particuliers : ainsi on sait que

$$\lim \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

$$\lim \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x$$

$$\lim \frac{\operatorname{Tg}(x+h) - \operatorname{Tg} x}{h} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

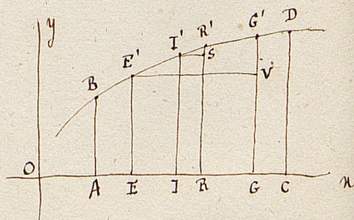
$$\lim \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

etc.

Ici, une question se présente. Dans les exemples précédents, cette limite est finie. Mais en est-il toujours de même ?

Il est facile de voir qu'il en est ainsi, sauf quelques cas très-particuliers. – D'abord, si nous nous reportons à la figure précédente, nous voyons que cette limite est précisément le coefficient angulaire de la tangente en m, c.à.d $\frac{mp}{pt}$, ou $\frac{\text{ordonnée}}{\text{sous-tangte}}$: valeur qui, évidemt. est généralement finie. – D'ailleurs, on peut le démontrer à priori :

Soit en effet $y = f(x)$. Si h est l'accroissement infiniment petit de x, k l'accroissement correspondant de y, ou $f(x+h) - f(x)$, je dis que $\lim \frac{k}{h}$ est une quantité finie. – Pour cela, je vais démontrer qu'elle ne peut être ni constamment nulle ni constamt. infinie. – En effet, nous pouvons toujours considérer $y = f(x)$ comme représentant l'ordonnée d'une courbe dont x serait l'abscisse. – Je dis d'abord que $\lim \frac{k}{h}$ n'est pas constamment zéro pour les valeurs de x comprises entre les limites $OA = a$ et $OC = b$; à moins que y ne soit indépendant de x, ce qui est contre l'hypothèse. – En effet, considérons deux abscisses intermédiaires



quelconques, $OE = x_1$ et $OG = x_2$; et appelons y_1 et y_2 les ordonnées correspondantes. Concevons qu'on partage l'intervalle $x_2 - x_1$ en un très grand nombre de parties égales, dont chacune, telle que IR, sera désignée par h. Lorsque, sur la courbe, nous passerons de I' à R', l'ordonnée reçoit un accroissement correspondant que j'appelle k. Cet accroissement est variable de E' à G', et il peut même changer de signe. Mais, quoi qu'il en soit, il est évident que si l'on fait la somme algébrique de tous ces accroissements de l'ordonnée, cette somme sera la différence, positive ou négative, des ordonnées extrêmes, différence qui est ici G'V, et que je désigne par $y_2 - y_1$. — Cela posé, admettons que $\frac{k}{h}$ ait constamment zéro pour limite entre les points E et G: je puis toujours, par conséquent, prendre h assez petit pour que k ait une valeur numérique plus petite que $h\varepsilon$, ε étant une quantité fixe, mais qui peut d'ailleurs être prise aussi petite qu'on le veut. Par suite, la somme des valeurs numériques de k, ou Σk, en allant de x_1 à x_2, sera plus petite que $\varepsilon \Sigma h$, c.à.d.

$$\Sigma k < \varepsilon (x_2 - x_1)$$

et à fortiori

$$y_2 - y_1 < \varepsilon (x_2 - x_1)$$

inégalité impossible à moins que $y_2 - y_1$ ne soit rigoureusement nul. Donc alors l'ordonnée n'aurait pas varié de E' à G', qui sont deux points quelconques de la courbe intermédiaires entre B et D. Donc, entre B et D toutes les ordonnées seraient les mêmes, ce qui est absurde: donc $\lim \frac{k}{h}$ n'est pas constamment nulle. — D'où il suit qu'elle n'est pas non plus toujours infinie: car,

pour cela, il faudrait que, en renversant, $\lim \frac{h}{k}$ fût constamment nulle, ce qu'on démontrerait impossible en posant $x = \varphi(y)$.

Donc, en général, $\lim \frac{k}{h}$ a une valeur finie, qu'il y a lieu de chercher.

C'est là l'objet que nous nous proposons.

Définitions et Notations.

Représentons toujours par

$$y = f(x)$$

une fonction quelconque de x. — On a appelé Dérivée la limite du rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Nous la désignerons souvent par $f'(x)$, de sorte que nous avons, par définition

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

Si donc nous supposons que h ne soit pas nul, mais soit très-voisin de zéro, nous aurons, ε décroissant indéfiniment avec h, l'égalité

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon$$

D'où

$$f(x+h) - f(x) = h f'(x) + h\varepsilon$$

Donc l'accroissement de x se compose de deux parties: la première, $h f'(x)$, est telle que son rapport à h est une quantité finie, indépendante de h, et qui s'appelle la Dérivée. Cette première partie $h f'(x)$ a reçu le nom de Différentielle de la fonction y. — La seconde partie, $h\varepsilon$, se distingue de l'autre en ce que

son rapport à h dépend de h lui-même, et a pour limite zéro : elle n'a pas de nom particulier.

Pour désigner d'une manière abrégée la différentielle de y, on l'écrit dy. Donc, par définition,

$$(1) \qquad dy = h f'(x)$$

Donc la différentielle d'une fonction est le produit de sa dérivée par l'accroissement de la variable.

Il suit de là que la différentielle de x est h. Car, x étant en même temps fonction et variable, on a

$$dx = h \lim \frac{(x+h)-x}{h} = h.$$

L'égalité (1) peut donc encore s'écrire

$$dy = f'(x)\, dx$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

telle est donc, par suite de nos définitions, la notation différentielle de la dérivée. — On voit ainsi que

La dérivée d'une fonction est égale au quotient de la différentielle de cette fonction par la différentielle de la variable.

On représente assez souvent par Δy l'accroissement complet d'une fonction. Nous aurons donc

$$\Delta y = h f'(x) + h\varepsilon$$

tandis que

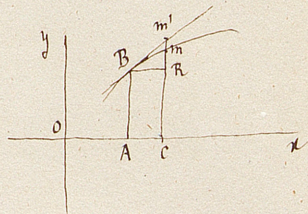
$$dy = h f'(x)$$

La limite de $\frac{\Delta y}{dy}$ est évidemment l'unité : car ils ne diffèrent que d'un infiniment petit du second ordre. C'est pour cela qu'on dit souvent que dy est l'accroissement infiniment petit de la fonction y : et en effet, on ne néglige ainsi que l'infin. petit du 2. ordre $h\varepsilon$,

ce qui est rigoureusement permis toutes les fois qu'on ne considère que des limites de rapports ou des limites de sommes dont les termes, augmentant sans cesse de nombre, diminuent indéfiniment de grandeur. Or ce sont ces deux seuls cas qu'on examine dans le calcul différentiel.

Quand il s'agit de x, on a $dx = \Delta x$.

Il est facile d'interpréter géométriquement dy et Δy. En effet, si $OA = x$, $AB = y$, $AC = h$, il est évident que $mR = \Delta y$: de plus $m'R = dy$. Car le triangle rectangle BRm' donne



$$m'R = BR \operatorname{tg} B = h f'(x) = dy.$$

Avant de passer à la recherche des règles propres à trouver les dérivées des diverses fonctions, il est bon de signaler une propriété importante de ces dérivées elles-mêmes. À l'inspection de la dérivée d'une fonction, on peut reconnaître si cette fonction est croissante ou décroissante quand x croît aux environs d'une certaine valeur.

En effet, imaginons que l'on reprenne l'expression

$$f(x+h) - f(x) = h \{ f'(x) + \varepsilon \}$$

et que l'on sache que, pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites a et b, la dérivée $f'(x)$ est positive: je dis qu'entre ces mêmes limites, c.à.d. quand x croissant part de a pour aller d'une manière continue jusqu'à b, la fonction $f(x)$ croît en même temps que x. — Pour le démontrer, je suppose que je donne à x une valeur quelconque comprise entre a et b: $f'(x)$ sera >0. Maintenant, je puis toujours prendre h assez petit pour que l'on ait, en valeur absolue,

$f'(x) > \varepsilon$. alors, comme $h > 0$, on aura toujours $h\{f'(x)+\varepsilon\} > 0$ et par suite $f(x+h) > f(x)$: donc la fonction est croissante.

Le même raisonnement démontrerait que, si la dérivée était négative, la fonction décroîtrait.

On pourrait ici demander: Qu'arriverait-il si, pour certaines valeurs de x, $f'(x)$ s'annulait, en restant >0 pour toutes les autres valeurs? Le raisonnement précédent paraît ne plus subsister, et alors en effet, il y a qq. mots à y ajouter. – Au lieu de la fonction $f(x)$, considérons la fonction $f(x)+gx$, g étant un nombre fixe, positif, mais qui peut d'ailleurs être pris aussi faible qu'on le voudra. – La dérivée de cette nouvelle fonction sera $f'(x)+g$. Mais cette dérivée rentre dans le cas précédent: elle est constamment positive. Donc la fonction correspondante est toujours croissante, et l'on a

$$f(x+h)+g(x+h) - f(x) - gx > 0$$

ce qui se réduit à

$$f(x+h) - f(x) + gh > 0$$

Cette inégalité démontre que la fonction $f(x)$ ne peut décroître. car, si c'était possible, on pourrait poser $f(x+h) - f(x) = -\delta$, et il resterait $-\delta + gh > 0$, et g pourrait être pris assez petit pour que cette dernière inégalité fût absurde. Donc $f(x)$ ne décroît pas. Donc

Théorème. Quand la dérivée d'une fonction est constamment positive, et passe même par zéro, la fonction est croissante; – quand elle est constamment négative, la fonction est décroissante.

Les réciproques étant évidentt. vraies, on peut dire:

Théorème. Si une fonction est toujours $\left\{\begin{matrix}\text{croissante}\\ \text{décroissante}\end{matrix}\right.$ entre deux limites a et b, sa dérivée n'est

jamais $\left\{\begin{array}{l}\text{négative}\\ \text{positive}\end{array}\right.$ entre ces mêmes limites.

Dérivées des fonctions algébriques.

Nous désignerons par

$$u, v, w, \dots$$

des fonctions de la forme

$$f(x), \varphi(x), \psi(x) \dots$$

1°. Fonctions additives ou soustractives.

Proposons-nous de trouver la dérivée de la fonction

$$y = u + v - w.$$

Je change x en $x + \Delta x$. J'appellerai $\Delta y, \Delta u, \Delta v, \Delta w$ les accroissements correspondants des fonctions y, u, v, w. J'aurai

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$$

ou

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

cette égalité est toujours vraie quelque petit que soit Δx: donc elle se vérifiera encore quand on prendra les limites des deux membres, et

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

ou, en multipliant par dx

$$dy = du + dv - dw$$

ce qui démontre que la différentielle d'une somme algébrique de plusieurs fonctions est égale à la somme algébrique des différentielles de ces fonctions, et que la même règle s'applique à leurs dérivées.

2°. Fonctions produit.

Prenons d'abord le cas de deux facteurs.

Soit la fonction

$$y = uv$$

Je change x en $x + \Delta x$. J'aurai

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv$$

$$= u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v$$

D'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$$

Passant à la limite, on aura

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

ou

$$dy = u\,dv + v\,du$$

ce qui montre que la différentielle d'un produit de deux facteurs est égale à la somme des produits de chaque facteur par la différentielle de l'autre.

Ce résultat comprend celui où u est égal à une constante a. alors, da étant nul, on a

$$y = av \qquad dy = a\,dv$$

En rapprochant ce résultat de la formule générale, on voit que pour avoir la différentielle d'un produit de deux fonctions, il suffit de faire la somme des résultats obtenus en supposant que successivement chaque fonction soit constante, et l'autre seule variable.

Rem. Cette observation, qui se généralisera bientôt, s'appliquait évidemᵗ. au cas des fonctions additives.

Remarquons encore que, si $a = -1$, on a

$$d(-v) = -dv$$

c.a.d. que, si une fonction change de signe, il en est de même de sa différentielle.

Enfin, observons que la formule générale

$$d(uv) = udv + vdu$$

peut se mettre sous cette forme

$$\frac{d(uv)}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}$$

ce qui montre que le rapport de la différentielle d'un produit de deux facteurs, à ce produit, est égal à la somme des rapports des différentielles de chaque facteur à ce facteur.

Je dis maintenant que cette dernière règle est générale, quel que soit le nombre des facteurs.

En effet, on a d'après le cas précédent

$$\frac{d(uvw)}{uvw} = \frac{d(uv.w)}{uv.w} = \frac{d(uv)}{uv} + \frac{dw}{w} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}$$

Maintenant, du cas de 3 facteurs, on passerait facilement à celui de 4, et ainsi de suite. Donc en général :

$$\frac{d(uv\ldots w)}{uv\ldots w} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \cdots + \frac{dw}{w}$$

ou bien encore

$$d(uv\ldots w) = v\ldots w\,du + u\ldots w\,dv + \cdots + uv\ldots dw$$

ce qu'il est facile d'énoncer en langage ordinaire.

3°. Fonctions Quotient.

Soit
$$y = \frac{u}{v}$$

D'où
$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

$$\Delta y = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

et, en divisant par Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

Dans le cas particulier où $u = a$, on aurait

$$d\left(\frac{a}{v}\right) = -\frac{a\,dv}{v^2}$$

Si au contraire $v = a$

$$d\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{1}{a}du$$

et l'on voit encore que dy est la somme de ces deux Résultats.

Rem. dy aurait pu se trouver en partant de la différentielle d'un produit

$$y = \frac{u}{v}$$

$$u = vy$$

$$du = v\,dy + y\,dv$$

$$dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \quad \text{c.q.f.d.}$$

4°. Puissances.

Soit

$$y = u^m$$

m étant entier et positif. l'on aura

$$u^m = u.u.u.\ldots u$$

D'où

$$\frac{d.u^m}{u^m} = \frac{du}{u} + \frac{du}{u} + \ldots + \frac{du}{u}$$

ou

$$d.u^m = m u^{m-1} du$$

Soit actuellement $m = \frac{p}{q}$. Nous aurons

$$y = u^{\frac{p}{q}}$$

ou

$$y^q = u^p$$

D'où

$$q y^{q-1} dy = p u^{p-1} du$$

$$dy = \frac{p}{q} \frac{u^{p-1}}{y^{q-1}} du$$

or $y = u^{\frac{p}{q}}$. Donc $y^{q-1} = u^{\frac{p}{q}(q-1)} = u^{p-\frac{p}{q}}$. Donc

$$dy = \frac{p}{q} u^{p-1-p+\frac{p}{q}} du$$

$$dy = \frac{p}{q} u^{\frac{p}{q}-1} du$$

c'est encore la même Règle.

Cette dernière formule, écrite avec des Radicaux, devient

$$d\left\{\left(\sqrt[q]{u}\right)^p\right\} = \frac{p}{q}\left(\sqrt[q]{u}\right)^{p-q} du$$

forme qui montre que les deux membres ont un pareil nombre de déterminations algébriques.

Si l'on applique cette règle au cas d'un Radical carré, on a $m = \frac{1}{2}$. Donc

$$d\left(\sqrt[2]{u}\right) = d\left(u^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

et pour la Dérivée

$$\frac{d\left(\sqrt[2]{u}\right)}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{du}{dx}$$

dans cette dernière formule, si l'on fait $u = x$, il reste

$$\frac{d\left(\sqrt[2]{x}\right)}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

résultat déjà connu, et d'après lequel on voit que la

formule $\frac{d(\sqrt{u})}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{dx}$ peut s'énoncer ainsi :

Pour avoir la dérivée d'un radical carré portant sur une fonction de x, il suffit de prendre la dérivée de ce radical en regardant la fonction comme une variable indépendante, pourvu que l'on multiplie ensuite par la dérivée de cette fonction elle-même considérée alors comme $f(x)$; — résultat remarquable, et que nous verrons se généraliser.

Prenons enfin le cas des puissances négatives.

$$y = u^{-m}$$

m étant d'ailleurs quelconque. on peut écrire

$$y = \frac{1}{u^m}$$

Donc

$$dy = -\frac{mu^{m-1}du}{u^{2m}}$$

$$d(u^{-m}) = -mu^{-m-1}du$$

Ce qui montre que la règle trouvée plus haut est complètement générale. — Il est vrai que l'on n'a considéré que des exposants commensurables : mais comme alors elle est toujours vraie, la méthode des limites montrerait facilement qu'elle se vérifie pour les exposants incommensurables.

Telles sont les règles à suivre pour la différentiation des fonctions algébriques quelconques.

---

avant de passer aux fonctions transcendantes, nous allons généraliser deux résultats qui se sont déjà présentés.

Des Fonctions de Fonctions.

Supposons que l'on ait

$$\left.\begin{array}{l} y = f(u) \\ \text{et} \quad u = \varphi(x). \end{array}\right\} \; y = f(\varphi(x))$$

Si je mettais à la place de u sa valeur, j'aurais un Résultat de la forme $y = F(x)$, et je pourrais appliquer les règles connues pour trouver la dérivée de y. Mais, en général, on préfère ne pas effectuer cette substitution parce qu'on peut assez simplement s'en passer. — Je change x en $x + \Delta x$; u devient $u + \Delta u$, et y, $y + \Delta y$. Or, on a identiquement

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

et, à la limite

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Donc

La dérivée relative à x d'une fonction d'u, u étant fonction d'x, est égale à la dérivée de la première fonction prise par rapport à u comme si u était une variable indépendante, et multipliée par la dérivée de la fonction u.

L'Egalité précédente devient, en multipliant par dx,

$$dy = \frac{dy}{du} \cdot du$$

Ceci semble une identité, et l'on pourrait croire au premier abord qu'il serait permis de l'écrire sans démonstration. Mais remarquons bien que le du qui est au dénominateur désigne l'accroissement arbitraire que l'on

donnerait à u en le considérant comme une variable indépendante, et qu'au contraire du, au numérateur, est la différentielle c. à d. une partie de l'accroissement de la fonction d'x que u représente.

Le théorème précédent est susceptible d'être généralisé. Supposons en effet qu'on ait

$$y = f(u) \qquad u = \varphi(v) \qquad v = \psi(x)$$

J'aurai, d'après ce qui précède

$$dy = \frac{dy}{du}\,du$$

$$du = \frac{du}{dv}\,dv$$

$$dv = \frac{dv}{dx}\,dx$$

Multipliant membre à membre, il vient

$$dy = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \cdot dx$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

De sorte que l'énoncé précédent est général.

Il y a encore un théorème assez important sur les fonctions de fonctions.

La différentielle d'une fonction y de plusieurs autres fonctions $u, v, \ldots w$ de la variable x s'obtient en faisant la somme des résultats auxquels on arrive en différentiant y par rapport à chacune des fonctions successivement, toutes les autres étant supposées constantes.

Démontrons-le d'abord pour le cas de deux fonctions,

$$y = f(u, v)$$

Je dis que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}$$

Supposons que x devienne $x+\Delta x$. Nous aurons alors

$$\Delta y = f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u,v)$$

ou

$$\Delta y = f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v) + f(u, v+\Delta v) - f(u,v)$$

or, par définition, on a

$$f(x+h) - f(x) = h\{f'(x) + \varepsilon\}$$

donc

$$f(u, v+\Delta v) - f(u,v) = \Delta v\{f'_v(u,v) + \varepsilon\}$$

Quant à la différence des deux premiers termes de Δy, je remarque que j'aurais

$$f(u+\Delta u, v) - f(u,v) = \Delta u\{f'_u(u,v) + \alpha\}$$

Cette égalité étant vraie quel que soit v, j'aurai

$$f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v) = \Delta u\{f'_u(u, v+\Delta v) + \alpha'\}$$

De sorte que Δy devient, en divisant par Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}\{f'_u(u, v+\Delta v) + \alpha'\} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\{f'_v(u,v) + \varepsilon\}$$

En passant à la limite, et revenant à la notation différentielle, on a donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\frac{dy}{du} + \frac{dv}{dx}\frac{dy}{dv}$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}$$

Le théorème se démontrerait de même pour trois ou plusieurs fonctions.



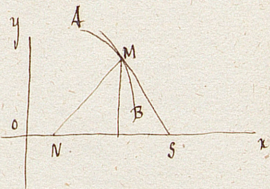
Quelques applications.

Soit M un point d'une courbe AB, MS la tangente, MN la normale et MP l'ordonnée. La sous-normale NP a une expression différentielle très simple. En effet

$$NP = y\,tg\,NMP = y(-tg\,MSP) = -y\frac{dy}{dx}$$

Ici nous trouvons une sous-normale négative. Elle aurait été positive si l'ordonnée du point M eût été croissante au lieu de décroître aux environs du point M, car alors évidemment on aurait eu

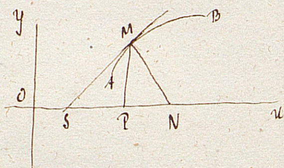
$$NP = y\,tg\,NMP = y\,tg\,MSP = y\frac{dy}{dx}.$$



On trouve donc une sous-normale positive ou négative, selon qu'elle est comptée dans le sens des x positifs ou négatifs à partir du pied de l'ordonnée, ou bien suivant que cette ordonnée est croissante ou décroissante. Or, selon que l'ordonnée croît ou décroît, la dérivée $\frac{dy}{dx}$ est positive ou négative. Donc, en définitive, la valeur de NP devient toujours >0. On est donc convenu d'écrire toujours

$$NP = \text{Sous-norm.} = y\frac{dy}{dx}$$

et, si l'on trouve une valeur négative, c'est que la sous-normale doit être comptée du côté des x posit. négatifs.



Actuellement, sachant que dans la Parabole, la sous-normale est constante, proposons-nous ce problème : La Parabole est-elle la seule courbe dans laquelle la sous-normale est constante ? — Posons $y\frac{dy}{dx} = p$, et cherchons quelles sont les fonctions y qui peuvent satisfaire à cette relation. Multipliant par dx, elle devient $ydy = pdx$. Le premier membre est la différentielle de $\frac{1}{2}y^2$, le 2d. celle de px. Or, quand deux fonctions ont leurs différentielles égales, il est aisé de voir que leur différence est constante. Donc on aura, C étant une constante arbitraire, $\frac{1}{2}y^2 = px + C$ ou $y^2 = 2px + 2C$, éq. générale de paraboles qui ont un paramètre commun égal au double de la sous-normale. — Donc la seule courbe qui jouit de la propriété demandée est bien la Parabole.

Problème : — Quelles sont les courbes dans lesquelles la sous-normale est proportionnelle à l'abscisse ? — Il faut que l'on ait $y\frac{dy}{dx} = ax$, ou $2y\frac{dy}{dx} = 2ax$, ce qui revient à $d.y^2 = d.ax^2$. Donc on devra avoir $y^2 = ax^2 + C$, éq. générale qui représente une suite d'hyperboles ou d'ellipses suivant le signe de a. Si $a=1$ il vient $y^2 = x^2 + C$ ce qui donne une suite d'hyperboles équilatères rapportées à leurs diamètres principaux pour axes coordonnés. Cela démontre en passant ce théorème que, dans une Hyperbole équilatère rapportée à son centre et à ses axes, la sous-normale est égale à l'abscisse.

Si la sous-normale devait être proportionnelle à l'ordonnée l'éq. serait $y\frac{dy}{dx} = ay$, et, en supprimant la solution $y=0$, qui représente l'axe des x, $dy = adx$. Donc enfin l'Eq. Générale demandée est $y = ax + C$, éq. qui représente une série de droites parallèles.

Si l'on demande la courbe dans laquelle la sous-normale est puissance m de l'abscisse : $y\frac{dy}{dx} = x^m$ ou $ydy = x^m dx$, ou $d.\frac{y^2}{2} = d.\frac{x^{m+1}}{m+1}$. Donc

l'Eq. générale est $y^2 = 2\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$, éq. qui se simplifie dans quelques cas particuliers.

On peut obtenir avec tout autant de facilité l'expression différentielle de la Sous-Tangente. On trouve

$$\text{Sous-Tangente} = y\frac{dx}{dy}$$

et l'on pourrait résoudre les mêmes problèmes que sur la sous-normale. La marche à suivre est la même.

Des Séries.

Une Série est une Suite infinie de quantités qui se déduisent l'une de l'autre d'après une loi déterminée.

Dans une série

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, a_{n+1}, \ldots$$

on désigne par S_n la somme des n premiers termes

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}.$$

Si, pour des valeurs toujours croissantes de n, S_n tend indéfiniment vers une certaine valeur limite S, cette Limite prend le nom de Somme de la série, et l'on dit que la Série est Convergente: on a alors $\text{Lim.}\, S_n = S$. Si cette condition n'est pas remplie, la Série est Divergente.

Il s'agit de savoir comment on peut reconnaître si une Série est ou non Convergente.

D'abord, si l'on compare deux sommes partielles consécutives, S_n et S_{n+1}, il faut évidemment qu'elles convergent vers une même limite finie, et que par conséquent la différence $S_{n+1} - S_n$ converge vers zéro

$$\text{Lim}\left(S_{n+1} - S_n\right) = 0$$

ou

$$\text{Lim.}\, a_n = 0$$

ainsi Il faut que les Termes aillent en décroissant indéfinim.t jusqu'à zéro.

Cette condition, nécessaire pour que la Série soit Convergente, n'est pas suffisante. Pour s'en assurer, on n'a qu'à considérer la série

(1) $\quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots$

Elle est Divergente. En effet, considérons les termes

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

c. à d. les n termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$. Leur somme est plus grande que n fois le dernier, ou que $\frac{1}{2}$. — Considérons

les $2n$ termes suivants

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{4n}$$

leur somme est plus grande que $2n$ fois le dernier ou $\frac{1}{2}$; et ainsi de suite ; on pourra, à partir d'un terme quelconque, isoler un nombre infini de groupes qui seront tous plus grands que $\frac{1}{2}$. Donc ce qu'on négligerait en s'arrêtant à un terme quelconque serait plus grand que $\frac{1}{2}$ répété un nombre infini de fois, ce qui prouve évidemment que la série est divergente.

Cette série (1) s'appelle série harmonique. — En effet, si sur une droite AB on prend des longueurs $AB = \frac{1}{n}$, $AC = \frac{1}{n+1}$, $AD = \frac{1}{n+2}$ les 4 points A, B, C, D sont conjugués harmoniques, de telle sorte qu'on a

A   D   C   B

$$AB \cdot DC = AD \cdot CB$$

ou

$$\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+2} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

et c'est ce qu'il est aisé de vérifier.

Théorème. Pour qu'une série soit convergente, il suffit que, si l'on considère les sommes S_n S_{n+1} S_{n+2} ... S_{n+p} quelque grand que soit p, pourvu qu'il n'augmente pas indéfiniment, toutes ces sommes convergent vers une limite finie commune, et pour cela, il suffit évidemment que

$$\lim \left(S_{n+p} - S_n\right) = 0$$

ou

$$\lim \left(a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p-1}\right) = 0$$

ainsi

Théorème. Pour qu'une série soit convergente, il faut et il suffit qu'en s'arrêtant à un terme quelconque, la somme des p termes suivants converge vers zéro, quand on s'avance de plus en plus loin dans la série.

Cette condition générale est évidente, mais n'est pas toujours facile à constater, et il est souvent avantageux de la remplacer

par des caractères d'une application plus aisée.

1° Séries à termes positifs.

Soit la série

$$(1) \quad a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

Considérons aussi la série

$$(2) \quad v_0, v_1, v_2, \ldots v_n, \ldots$$

que nous supposerons convergente. Si l'on peut constater que, pour toutes les valeurs de n qui dépassent un nombre donné, on a toujours

$$a_n < C v_n$$

C étant une constante quelconque, on peut affirmer que la série (1) est aussi convergente.

En effet, on aura alors

$$a_{n+1} < C v_{n+1}$$

$$a_{n+2} < C v_{n+2}$$

$$a_{n+p} < C v_{n+p}$$

Donc

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < C\left(v_{n+1} + v_{n+2} + \cdots + v_{n+p}\right)$$

C étant constant, le 2^d^ membre converge vers zéro quand n croît au delà de toutes limites: donc aussi le premier: donc la série (1) est convergente.

Considérons comme application la série

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots + \frac{1}{1.2\ldots n} + \cdots$$

Je la compare avec la progression décroissante

$$\frac{1}{1.2\ldots(n-1)n} + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)n^2} + \cdots + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)n^n} + \cdots$$

que l'on sait être une série convergente. Les termes que je compare étant ceux qui se correspondent dans les deux suites ci-dessous :

$$\begin{cases} \frac{1}{1.2\ldots n} & \frac{1}{1.2\ldots n(n+1)} & \frac{1}{1.2\ldots n(n+1)(n+2)} & \frac{1}{1.2\ldots n(n+1)(n+2)(n+3)} & \ldots \\ \frac{1}{1.2\ldots n} & \frac{1}{1.2\ldots(n-1)n^2} & \frac{1}{1.2\ldots(n-1)n^3} & \frac{1}{1.2\ldots(n-1)n^4} & \ldots \end{cases}$$

on voit que chaque terme de la progression géométrique est plus grand que le terme correspondant de la série proposée : donc celle-ci est convergente.

Cherchons, dans cette série, la valeur de S_n. On a

$$S_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \cdots + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}$$

En s'arrêtant au n^e. terme, l'erreur commise sera donc plus petite que

$$\frac{1}{1.2\ldots(n-1)n} + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)n^2} + \ldots \text{etc.}$$

ou

$$\text{Er.} < \frac{\frac{1}{1.2\ldots n}}{1-\frac{1}{n}} < \frac{1}{1.2\ldots(n-2)(n-1)^2}$$

Si par exemple on prend 11 termes, on a

$$\text{Er.} < \frac{1}{1.2\ldots 9.10^2} < \frac{1}{10^7}$$

On représente habituellement la somme de cette série par e et l'on a

$$e = 2,71828 1828 \ldots$$

L'inspection seule de la série fait voir immédiatement qu'elle est plus grande que 2. On peut voir facilement encore qu'elle est inférieure à 3. Car

$$e < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots < 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} < 3$$

Je dis maintenant que la valeur de e est incommensurable. Car, supposons qu'elle peut être exprimée par une fraction irréductible $\frac{a}{b}$, et que l'on eût

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \cdots + \frac{1}{1.2\ldots(b-1)} + \frac{1}{1.2\ldots b} + \frac{1}{1.2\ldots(b+1)} + \cdots$$

en multipliant par $1.2\ldots b$ on aurait

$$a(b-1)(b-2)\ldots 3.2.1 = K + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \cdots$$

k étant un nombre entier. Or

$$\frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \cdots < \frac{1}{b+1} + \left(\frac{1}{b+1}\right)^2 + \cdots < \frac{\frac{1}{b+1}}{1-\frac{1}{b+1}} < \frac{1}{b}$$

à fortiori ..... < 1. — Donc l'égalité ci-dessus est absurde. Donc la valeur de e est incommensurable.

Voyons maintenant à donner d'autres caractères plus simples au moyen desquels on peut reconnaître la convergence d'une série.

Théorème. — Si, pour toutes les valeurs de n qui dépassent un nombre donné, on constate que $\sqrt[n]{a_n}$ est $< K$, K étant un nombre constant < 1, la série est convergente.

Car on aura

$$a_n < K^n$$

$$a_{n+1} < K^{n+1}$$

$$a_{n+2} < K^{n+2}$$

$$\vdots$$

$$a_{n+p} < K^{n+p}$$

Donc

$$a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < K^n\left(1 + K + K^2 + \cdots + K^p\right)$$

à fortiori

$$< K^n \frac{1}{1-K}$$

Le second membre a pour limite zéro quand n augmente indéfiniment. Donc la série proposée est convergente.

Si l'on prenait S_n pour la valeur de S, l'erreur commise aurait pour limite supérieure $\frac{K^n}{1-K}$.

Si maintenant, on avait $\sqrt[n]{a_n} > K$ et $K > 1$ ou même $K = 1$, la série serait évidemment divergente.

Enfin on ne pourrait rien conclure dans le cas où l'on aurait $\sqrt[n]{a_n} < K$, et $K \equiv 1$, ou bien $\sqrt[n]{a_n} > K$ et $K < 1$.

Théorème. — Si, pour toutes les valeurs de n qui dépassent un nombre donné, on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} < k$, et $k<1$, la série est convergente.

En effet, on a alors

$$a_{n+1} < k a_n$$
$$a_{n+2} < k a_{n+1}$$
$$< k^2 a_n$$
$$a_{n+3} < k^3 a_n$$
$$\vdots$$
$$a_{n+p} < k^p a_n$$

Donc

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < a_n \left(k + k^2 + \cdots + k^p\right)$$
$$< a_n \frac{k}{1-k}$$

Le second membre tend vers zéro quand n augmente, puisque $\lim a_n = 0$, sans quoi il n'y aurait à chercher aucune condition de convergence. — Donc la série est bien convergente.

Si l'on prend S_n pour S, la limite de l'erreur commise est $\frac{k a_n}{1-k}$.

Ce théorème est d'un emploi commode quand les termes de la série dérivent l'un de l'autre par l'introduction ou la suppression d'un facteur, et que deux termes consécutifs se trouvent ainsi renfermer un grand nombre de facteurs communs qui disparaissent par la division.

Soit par ex. la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{x^n}{1.2 \ldots n} + \cdots$$

La valeur de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ est $\frac{x}{n+1}$. Si n croît, quel que

soit x, le rapport finit toujours par devenir <1. Donc la série est convergente quel que soit x.

Au contraire, si $\frac{a_{n+1}}{a_n} > K$ et $K \geqq 1$, la série est divergente : car les termes ne vont plus alors en décroissant.

Si $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ est constamment $< (K=1)$ mais a pour limite 1, on ne peut faire usage de ce caractère qui n'indique plus rien. En effet, on a alors

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + \cdot < a_n \,(K + K^2 + \cdots)$$

et, à la limite, l'inégalité se change en égalité

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots = a_n\,(1+1+1 \cdots)$$

a_n tend vers zéro : mais la parenthèse augmente indéfinim^t. On ne peut donc rien conclure.

Soit par exemple la série

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots$$

Si $\alpha = 1$, on sait déjà que la série est divergente. Si $\alpha < 1$, elle le sera encore à plus forte raison. — Supposons donc $\alpha > 1$. Le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ devient

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+2)^\alpha}}{\frac{1}{(n+1)^\alpha}} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^\alpha = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\right)^\alpha$$

Ce rapport, pour des valeurs finies de n, est toujours <1 : mais, si n augmente indéfiniment, il converge vers 1. On ne peut donc rien affirmer. — Je vais faire voir cepend^t qu'ici la série est convergente. Considérons S_n

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$$

n est toujours compris entre deux puissances consécutives de 2. Soit $n \geqq 2^m$, donc $n < 2^{m+1}$, d'où $n \leqq 2^{m+1} - 1$. Si je continue la série jusqu'à $(2^{m+1}-1)^\alpha$, j'aurai une quantité égale ou supérieure à S_n. Donc

$$S_n \overline{\gtrless} 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots \frac{1}{(2^{m+1}-1)^\alpha}$$

on peut grouper les termes de cette série en prenant pour 1er terme de chaque groupe celui dont le dénominateur est une puissance α de 2 ou d'une puissance de 2 : ainsi

$$S_n \overline{\gtrless} 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^m)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^{m+1}-1)^\alpha}\right)$$

La première parenthèse est plus petite que 2 fois son 1er terme, ou que $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$; la seconde est plus petite que 4 fois son 1er terme, ou que $\frac{2^2}{2^{2\alpha}} = \frac{1}{2^{2(\alpha-1)}}$, etc. enfin le dernier groupe renferme un nombre de termes égal à $2^{m+1}-1-2^m+1 = 2^m$ et il est plus petit que 2^m fois son 1er terme, donc $< \frac{2^m}{2^{m\alpha}} = \frac{1}{2^{m(\alpha-1)}}$

donc enfin

$$S_n < 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{2(\alpha-1)}} + \cdots + \frac{1}{2^{m(\alpha-1)}}$$

or le second membre est la somme des termes d'une progression géométrique décroissante : elle converge vers une limite finie lorsque n augmente indéfiniment. Donc la série est convergente.

Ainsi une série peut être convergente quand $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, toujours <1, converge vers 1. Mais elle peut aussi être divergente dans le même cas. Car, dans la série harmonique

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots$$

on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

le rapport est toujours <1 et converge vers 1.

Il y a pourtant certains cas où l'on peut reconnaître, lorsque le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, toujours <1,

converge vers 1, s'il y a convergence ou divergence, et voici comment. — Puisque $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge vers 1, on pourra poser

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1+\alpha}$$

α convergeant indéfiniment vers zéro. Or je dis que

Théorème. — Si, pour des valeurs croissantes de n, le produit $n\alpha$ reste supérieur à k, $k>1$, la série est convergente.

Posons $k = \frac{p}{q}$, p et q étant entiers. Il est facile de reconnaître qu'on peut prendre n assez grand pour que l'on ait

$$1+\alpha > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{q}}$$

En effet, admettons que cette inégalité soit vraie; on en tirera

$$(1+\alpha)^q > \left(1+\frac{1}{n}\right)^p$$

ou, en développant d'après le Binôme de Newton,

$$1+q\alpha+\frac{q(q-1)}{1.2}\alpha^2+\cdots+\alpha^q > 1+p.\frac{1}{n}+\frac{p(p-1)}{1.2}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^p}$$

Effaçant 1 de part et d'autre, multipliant par n, divisant par q, et faisant passer dans le 1er membre le 1er terme du second, il vient

$$\left(n\alpha-\frac{p}{q}\right)+\frac{q-1}{1.2}n\alpha.\alpha+\frac{(q-1)(q-2)}{1.2.3}n\alpha.\alpha^2+\cdots+n\alpha\frac{\alpha^{q-1}}{q} > \frac{p(p-1)}{q.1.2}\frac{1}{n}+\frac{p(p-1)(p-2)}{q.1.2.3}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{q.n^{p-1}}$$

Si n est assez grand, $n\alpha-\frac{p}{q}$ ou $n\alpha-k$ est par hypothèse une quantité finie et positive; tout le reste décroit indéfiniment, donc l'inégalité se vérifie. Donc on a bien

$$1+\alpha > \left(1+\frac{1}{n}\right)^k$$

Il suit de là que

$$\frac{1}{1+\alpha} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}$$

$$< \frac{n^k}{(n+1)^k}$$

ou bien
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n^k}{(n+1)^k}$$
or, si je considère la série convergente
$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots + \frac{1}{n^k} + \ldots$$
dont je représente les termes par
$$u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \quad u_n$$
je vois que le rapport $\frac{n^k}{(n+1)^k}$ est précisément $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Donc on a
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

D'où
$$a_{n+1} < u_{n+1} \cdot \frac{a_n}{u_n}$$

De même
$$a_{n+2} < u_{n+2} \cdot \frac{a_{n+1}}{u_{n+1}}$$
$$< u_{n+2} \cdot \frac{a_n}{u_n} \quad \text{à fortiori} \quad (x)$$
$$a_{n+3} < u_{n+3} \cdot \frac{a_n}{u_n}$$
$$\vdots$$
$$a_{n+p} < u_{n+p} \cdot \frac{a_n}{u_n}$$

(x) Car $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n}$
D'où $\frac{a_n}{u_n} > \frac{a_{n+1}}{u_{n+1}}$

on voit donc que chaque terme de la série proposée est plus petit que le terme correspondant d'une série convergente, multiplié par une quantité fixe $\frac{a_n}{u_n}$: donc la proposée est convergente, c q f d.

Soit par exemple la série
$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots$$
Ici $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+2}$. Ce rapport est < 1 et converge vers 1 : on ne peut donc rien affirmer. Mais remarquons que

$\alpha = \frac{2}{n}$. Donc $n\alpha = 2$. Donc la Série est convergente. — Et l'on pourrait voir qu'elle a pour somme l'unité.

Si maintenant $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ est tel que $n\alpha$ reste au contraire $< k$, $k < 1$, alors il y aura Divergence. Le raisonnement est le même, si l'on a soin de renverser partout les inégalités posées, et si l'on remarque que, pour $k < 1$, la série $u_1, u_2, u_3, ..$ est Divergente.

Soit par exemple la Série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} + \frac{1.3\ldots(2n+1)}{2.4\ldots(2n+2)} + \cdots$$

on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2n+1}}$$

D'où

$$n\alpha = \frac{n}{2n+1}$$

$$\text{Lim } n\alpha = \frac{1}{2}$$

Donc la Série sera Divergente. — on peut remarquer que c'est le Développement de $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ quand on y fait $x = 1$.

Prenons au contraire la Série

$$1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\cdot\frac{1}{2n+1} + \frac{1.3\ldots(2n+1)}{2.4\ldots 2n}\cdot\frac{1}{2n+3} + \cdots$$

on a ici

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{1}{1+\frac{6n+5}{4n^2+4n+1}}$$

D'où

$$n\alpha = \frac{6n^2+5n}{4n^2+4n+1} \qquad \text{Lim. } n\alpha = \frac{3}{2}$$

Donc cette nouvelle Série est Convergente.

Si le produit $n\alpha$ restait toujours < 1 et avait pour Limite 1, nous pourrions encore affirmer qu'il y a Divergence. En effet, de $n\alpha < 1$ on tire $\alpha < \frac{1}{n}$, et $1+\alpha < 1+\frac{1}{n}$, d'où

$\frac{1}{1+\alpha} > \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$, ce qui revient à $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{u_{n+1}}{u_n}$, u_n étant le terme général de la série divergente $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots$ Donc la proposée est aussi divergente.

Au contraire, si $n\alpha$, toujours plus grand que 1, avait pour limite 1, ce serait le seul cas douteux que ce caractère put présenter.

Remarque. – Nous avons considéré deux cas principaux de convergence, ceux où l'on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} < k$ ou $a_n^{\frac{1}{n}} < k$, k étant <1 dans l'une et l'autre circonstance. – Il est bon de remarquer que ces deux caractères se confondent sous un certain point de vue, c.à.d. que

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim a_n^{\frac{1}{n}}$$

Posons en effet

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$$

Il s'ensuit que, pour des valeurs de n supérieures à un certain nombre fixe p, les rapports

$$\frac{a_{p+1}}{a_p} \quad \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} \quad \frac{a_{p+3}}{a_{p+2}} \dots \frac{a_{p+q}}{a_{p+q-1}}$$

différeront très-peu de k, et pourront être regardés comme compris entre $k-\varepsilon$ et $k+\varepsilon$. Donc la moyenne géométrique de ces rapports, c.à.d. $\left(\frac{a_{p+q}}{a_p}\right)^{\frac{1}{q}}$ sera elle-même comprise entre $k-\varepsilon$ et $k+\varepsilon$, et pourra être représentée par $k+\alpha$ de sorte que l'on aura

$$\left(\frac{a_{p+q}}{a_p}\right)^{\frac{1}{q}} = k+\alpha$$

Je pose $p+q=n$, d'où $q=n-p$. Elevant les deux

membres à la puissance q, il vient

$$a_n = a_p (k+\alpha)^{n-p}$$

D'où

$$a_n^{\frac{1}{n}} = a_p^{\frac{1}{n}} (k+\alpha)^{1-\frac{p}{n}}$$

Si n croît indéfiniment, on aura

$$\lim a_n^{\frac{1}{n}} = \lim a_p^{\frac{1}{n}} . k = k$$

car $\sqrt[n]{A}$ converge toujours vers 1 quand n augmente au delà de toutes limites. Donc

$$\lim a_n^{\frac{1}{n}} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$$ c q f d.

Séries à termes positifs et négatifs.

Théorème. – Si, en réduisant tous les termes à leur valeur numérique à partir du n^e, on trouve une seconde série convergente, la première le sera aussi.

Cela est parfaitement clair.

Cette condition est suffisante, mais non pas nécessaire. ainsi la série suivante

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

est divergente, quoique celle-ci

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

soit convergente ; car :

Théorème. – Toutes les fois que, à partir d'un certain rang, les termes finissent par devenir alternativement positifs et négatifs, et que de plus leurs valeurs numériques diminuent indéfiniment, il y a convergence.

Mettons les signes en évidence, et prenons la série

$$a_1 \; a_2 \; a_3 \cdots - a_n + a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots$$

où nous supposerons que la loi se vérifie à partir du n.e terme. — Considérons les p termes qui suivent a_n. Ce seront

Si p est pair, $\quad + a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots \quad + a_{n+p-1} - a_{n+p}$

" impair $\quad + a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots \quad - a_{n+p-1} + a_{n+p}$

Dans ces deux cas, l'ensemble de ces termes est positif. Cela devient évident si l'on remarque qu'ils vont en décroissant et qu'ils peuvent se grouper de la manière suivante par couples essentiellement positifs, finissant par un seul terme positif dans le 2.e cas.

$$+ (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots \; + (a_{n+p-1} - a_{n+p})$$

et

$$+ (a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots \; + (a_{n+p-2} - a_{n+p-1}) + a_{n+p}$$

De plus, dans les deux cas encore, cette somme est plus petite que a_{n+1} : car elle peut s'écrire

$$a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+p-2} - a_{n+p-1}) - a_{n+p}$$

et

$$a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots \; - (a_{n+p-1} - a_{n+p})$$

Donc, si R est l'ensemble des termes qui suivent a_n, on a constamment

$$0 < R < a_{n+1}$$

Donc R a pour limite zéro : donc la série est convergente.

On voit en même temps que, dans une pareille série, l'erreur est toujours de signe contraire à celui du terme après lequel on s'arrête, et plus petite que ce même terme, c'est-à-dire le 1.er de ceux qu'on ne prend plus.

Ainsi, soit la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Si je prends six termes, j'ai un résultat trop petit, c.a.d. une erreur positive, et la différence avec le Résultat Réel est plus petite que $\frac{1}{7}$.

Ainsi, les Séries à termes positifs et négatifs se partagent en deux grandes classes : celles qui restent convergentes quand on réduit leurs termes à leurs valeurs numériques, et celles qui ne sont convergentes qu'à cause des Réductions que la différence des signes amène entre leurs termes.

Quand une Série est convergente lors même qu'on réduit tous ses termes à leur valeur numérique, il est permis d'intervertir l'ordre des termes, sans que la Série cesse d'être convergente et d'avoir la même Somme.

En effet, soit

$$(1) \qquad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_n \quad a_{n+1} \quad a_{n+2} \cdots$$

une Série de ce genre. appelons

$$s_{n+1} \quad s_{n+2} \quad s_{n+3} \cdots$$

les valeurs numériques des termes qui suivent a_n, et posons

$$R_n = s_{n+1} + s_{n+2} + s_{n+3} + \cdots$$

Je suppose que, dans la Série (1), on intervertisse l'ordre des termes suivant une loi déterminée quelconque, de manière à avoir

$$(2) \qquad a'_1 \quad a'_2 \quad a'_3 \cdots\cdots \quad a'_n \quad a'_{n+1} \quad a'_{n+2} \cdots$$

Je considère les Sommes

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n$$

$$S'_m = a'_1 + a'_2 + a'_3 + \cdots\cdots + a'_m$$

En prenant $m > n$, je pourrai toujours m'arranger de façon que S'_m contienne tous les termes qui entrent dans S_n ; de sorte que j'aurai $S'_m = S_n +$ un certain nombre de termes, positifs ou négatifs, faisant partie de la suite $a_{n+1}, a_{n+2} \cdots$

Mais évidemment l'ensemble de ces termes sera inférieur à R_n. Donc on pourra poser

$$S'_m = S_n \pm \theta R_n \qquad 0 < \theta < 1$$

et à la limite, pour m et n croissant indéfiniment, m cependt. restant toujours assez supérieur à n pour que la condition que j'ai supposée soit remplie,

$$\text{Lim. } S'_m = \text{Lim } S_n.$$

Donc la série est convergente, et vers la même somme qu'avant l'interversion de l'ordre de ses termes.

Si au contraire, la série n'est convergente qu'à cause des réductions qui s'opèrent, on ne peut intervertir ainsi l'ordre des termes sans s'exposer à de graves conséquences. Soit la série

$$(1) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

qui est le Log. népérien de 2 : elle est convergente. Mais, si nous prenons négativement tous les termes, de manière à avoir

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \cdots$$

ou positivement, ce qui revient au même, nous avons des séries divergentes. Je dis qu'alors on ne peut changer d'une manière quelconque l'ordre des termes. Prenons dans la série (1) l'ensemble des termes négatifs

$$-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right)$$

leur somme croît indéfiniment. Je puis donc distribuer ces termes en une infinité de groupes dont chacun soit plus grand que k, et placer chaque groupe à la suite d'un terme ~~négatif~~ positif. On conçoit ainsi que, pour certaines valeurs de k, il pourra très-bien se faire que chaque groupe négatif, plus le terme positif correspondt, donne une valeur négative $> m$ en valeur absolue, et, comme il y aura une infinité de ces différences, la série deviendra divergente. Ainsi, je prends chaque groupe négatif

plus grand que $\frac{1}{4}$: j'aurai la nouvelle Série

$$1+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{7}-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+\frac{1}{16}\right)$$
$$+\frac{1}{9}-\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{32}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{1+2n}-\left(\frac{1}{2^n+2}+\frac{1}{2^n+4}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$
$$+\frac{1}{1+2(n+1)}-\left(\frac{1}{2^{n+1}+2}+\frac{1}{2^{n+1}+4}+\cdots+\frac{1}{2^{n+2}}\right)$$
$$+\cdots\cdots$$

Je dis qu'elle est divergente. En effet, les groupes entre parenthèses sont tous $> \frac{1}{4}$; les termes positifs qui les précèdent décroissent indéfiniment : donc les différences vont en augmentant en valeur absolue. Or, si je prends $\frac{1}{9}$ moins le 2e groupe par ex. la différence, en valeur absolue, est plus grande que $\frac{1}{4}-\frac{1}{9}$ ou $\frac{5}{36}$, à fortiori que $\frac{4}{36}$ ou $\frac{1}{9}$: donc, algébriquement, cette différence est $< -\frac{1}{9}$. Donc la somme de la Série, à partir de là, est plus petite que $-(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\cdots)$ jusqu'à l'infini : donc elle est infiniment grande négativement et la série est divergente.

Remarquons que le groupement peut être opéré de manière que la Série ait une autre somme, tout en restant convergente. — En effet, écrivons la Série (1) de la manière suivante

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots$$

Je dis que cette Série nouvelle est encore convergente, mais qu'elle n'a plus la même somme que la proposée. — Nous aurons en effet S et S' étant les sommes des deux Séries,

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots\cdots\cdots-\frac{1}{2n}$$
$$S'_{3n}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots\quad-\frac{1}{2n}$$

D'où

$$S'_{3n} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n-1}$$

D'où l'on tire évidemment

$$S'_{3n} - S_{2n} > n \cdot \frac{1}{4n-1} > \frac{1}{4}$$

$$S'_{3n} - S_{2n} < n \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2}$$

Donc

$$\lim \left(S'_{3n} - S_{2n} \right) \neq 0$$

$$S' \neq S \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Séries ordonnées par rapport à x.

Souvent on considère des séries ordonnées par rapport aux séries [puissances] positives et ascendantes d'une variable x, telles que celle-ci

$$(1) \qquad a_0 \quad a_1 x \quad a_2 x^2 \quad \cdots\cdots \quad a_n x^n$$

Supposons que l'on trouve

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = A$$

D'ailleurs, il s'ensuit qu'on aura égalem^t.

$$A = \lim a_n^{\frac{1}{n}}$$

Il est visible que

$$\lim \frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n\, x^n} = Ax$$

ce rapport, absolument parlant, devant toujours être <1, il en résulte que la série (1) sera convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\frac{1}{A}$ et $+\frac{1}{A}$. — au contraire, si x sort de ces limites, il y aura divergence : car alors le rapport d'un terme au précédent surpasse l'unité : $Ax > 1$,

et il est donc plus vrai de dire que les termes vont en décroissant. — Si $x = \pm \frac{1}{A}$, c'est là le seul point douteux qui demande alors une discussion spéciale dans chaque cas.

Soit pour exemple la série

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n} x^n + \dots$$

Est-elle convergente pour toutes les valeurs de x ? on trouve

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{m-n+1}{n-1} x$$

d'où

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = -x$$

Donc, pour la convergence, il faut que x soit compris entre -1 et $+1$.

Ces séries en x donnent lieu à quelques remarques curieuses.

Théorème. — Si l'on a une série convergente

$$(1) \qquad a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n \dots$$

dont les termes ont des signes quelconques, et si on la multiplie terme à terme par la série des puissances ascendantes de x, la série nouvelle

$$(2) \qquad a_0 x^0 \quad a_1 x^1 \quad a_2 x^2 \dots a_n x^n \dots$$

sera toujours convergente pour les valeurs de x inférieures à 1.

En effet on a

$$\sqrt[n]{a_n x^n} = x \sqrt[n]{a_n}$$

or, puisque la série (1) est convergente, $\sqrt[n]{a_n}$ ne reste pas constamment plus grand que l'unité : car alors, a_n serait toujours >1. Donc $\sqrt[n]{a_n}$ tend vers une limite inférieure à 1, ou tout au plus égale. Si donc $x < 1$, $x\sqrt[n]{a_n}$ sera certainement < 1, et la série (2) sera convergente C.Q.F.D.

Corollaire I. – Si une série

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

est convergente pour $x = \alpha$, elle le sera pour toute valeur de x plus petite que α.

En effet, nous pouvons, pour mettre α en évidence, écrire la série sous la forme suivante

$$a_0 + a_1 \alpha . \frac{x}{\alpha} + a_2 \alpha^2 \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \cdots + a_n \alpha^n . \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n + \cdots$$

Mais par hypothèse, la série $a_0 . a_1 \alpha \; a_2 \alpha^2 \cdots$ est convergente: on la multiplie terme à terme par la série $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^0 \; \left(\frac{x}{\alpha}\right) \; \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 \cdots$ dans laquelle $\frac{x}{\alpha} < 1$. On rentre donc dans le théorème précédent, et partant, le théorème est démontré.

Corollaire II. Si une série

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

est convergente pour $x = \alpha$, la série des dérivées sera convergente pour toute valeur de x plus petite que α.

En effet, la série des dérivées sera

$$a_1 + 2 a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

et le rapport de deux termes consécutifs donne

$$\frac{n+1}{n} . \frac{a_{n+1}}{a_n} x = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{a_{n+1}}{a_n} \alpha . \frac{x}{\alpha}$$

or $\frac{a_{n+1}}{a_n} \alpha$ a une limite qui, par hypothèse, est au plus égale à 1. D'ailleurs $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ et $\frac{x}{\alpha} < 1$. Donc la limite du rapport de deux termes consécutifs est < 1: donc la série est convergente.

Remarque. – On ne peut pas affirmer que, pour $x = \alpha$, la série des dérivées soit encore convergente. – Cela résulte

du raisonnement lui-même. — ainsi, soit

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

cette série est convergente pour $x=1$. La série dérivée sera

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

et, pour $x=1$, cette série n'est pas convergente.

Séries Imaginaires.

Enfin, on considère quelquefois des séries à termes imaginaires, de cette forme

$$(1) \quad a_1 + b_1\sqrt{-1}, \quad a_2 + b_2\sqrt{-1}, \ldots \quad a_n + b_n\sqrt{-1}, \ldots$$

Si j'appelle S_n la somme des n premiers termes, S'_n la somme des n premiers coefficients rationnels $a_1 + a_2 \ldots + a_n$, et S''_n la somme $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, il est visible que j'aurai

$$S_n = S'_n + S''_n\sqrt{-1}$$

Si S'_n et S''_n ont deux limites S' et S'', alors évidemment

$$\lim S_n = S' + S''\sqrt{-1}$$

on dit alors que la série imaginaire proposée est convergente, et a pour somme $S' + S''\sqrt{-1}$. — Dans le cas contraire, on dit que la série imaginaire est divergente.

On reconnaîtra facilement, pour la convergence des séries imaginaires, plusieurs caractères déjà trouvés pour les autres séries. ainsi, il est évident que, pour que la série (1) soit convergente, il faut que le terme général $a_n + b_n\sqrt{-1}$ tende vers zéro (ce qui est une manière de dire que a_n et b_n doivent tendre vers zéro), condition qui équivaut à celle-ci, savoir, que la quantité $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ doit diminuer indéfiniment ainsi :

Théorème. — Pour qu'une série imaginaire soit convergente, il faut que les modules des termes successifs aillent en convergeant vers zéro.

Cette condition est nécessaire, mais elle n'est pas évidemment suffisante.

On met souvent les quantités imaginaires sous la forme

$$a_n + b_n\sqrt{-1} = \rho_n\left(\cos\theta_n + \sqrt{-1}\sin\theta_n\right)$$

on voit donc, d'après cette forme seule, que si la série des modules

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \cdots + \rho_n$$

est convergente, il en est de même de la proposée. En effet, il est alors évident que les deux séries

$$\rho_1\cos\theta_1 + \rho_2\cos\theta_2 + \cdots + \rho_n\cos\theta_n + \cdots$$

et

$$\rho_1\sin\theta_1 + \rho_2\sin\theta_2 + \cdots + \rho_n\sin\theta_n + \cdots$$

sont encore à plus forte raison convergentes.

Ainsi, on sait déjà que

Théorème. — 1°. Pour qu'une série imaginaire soit convergente, il faut que, dans la série des modules, les termes aillent en décroissant indéfiniment jusqu'à zéro.

2°. Pour qu'une série imaginaire soit convergente, il suffit que la série des modules le soit.

Il suit de ce second principe que, étant donnée une série imaginaire, si l'on cherche la série des modules

$$(2)\qquad \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_n$$

si ensuite on trouve

$$k = \lim \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} = \lim \rho_n^{\frac{1}{n}}$$

si $k < 1$ il y aura convergence dans la série des modules

et par suite aussi dans la série imaginaire. — Si $k>1$, il y aura divergence dans la série des modules. Cela suffit-il pour qu'il y ait aussi divergence dans la série imaginaire? oui, dans ce cas particulier. Car bien qu'en général, il puisse y avoir divergence dans la série (2) et convergence dans la série (1), cependant il arriverait ici que $\frac{S_{n+1}}{S_n}$ étant >1, les modules n'iraient pas en convergeant vers zéro: il y aurait donc divergence, d'après le 1er caractère. — Si $k=1$, il y a doute.

De ce que la série imaginaire est toujours convergente quand la série des modules l'est elle-même, il ne faudrait pas conclure que la divergence de cette dernière entraînât nécessairement celle de la série imaginaire. — Il peut au contraire en être autrement. — Soit par exemple la série

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

que je considère comme une série de modules; je sais qu'elle est divergente: seulement ici la divergence n'est pas indiquée par le caractère $k>1$, puisque $k=1$. — Or la série imaginaire correspondante peut être convergente. Pour en former une, je prends le terme général

$$S_n\left(\sin\theta_n\sqrt{-1}+\cos\theta_n\right)$$

j'y pose $S_n=\frac{1}{n+1}$ et $\theta_n=(n+\frac{1}{2})\pi$. alors, tous les cosinus seront nuls, et la formule deviendra

$$\sqrt{-1}-\frac{1}{2}\sqrt{-1}+\frac{1}{3}\sqrt{-1}-\frac{1}{4}\sqrt{-1}+\cdots$$

La série des modules sera bien la série divergente

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

et pourtant la série imaginaire est bien convergente, puisqu'elle se réduit à

$$\sqrt{-1}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right).$$

Enfin, considérons une série imaginaire à termes ordonnés suivant les puissances ascendantes de x,

$$(a_0+b_0\sqrt{-1})+(a_1+b_1\sqrt{-1})x+(a_2+b_2\sqrt{-1})x^2+\cdots$$

et supposons que l'on donne à x des valeurs imaginaires. Entre quelles limites ces valeurs devront-elles être comprises pour que la série résultante soit convergente ? — Je fais $x=\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$ et je pose $\sqrt{a_n^2+b_n^2}=A_n$. Le module du terme général de la série résultante sera $A_n\rho^n$. Si je prends le rapport d'un module au précédent, j'aurai $\frac{A_{n+1}}{A_n}\rho$; ou, si je prends la racine n^e du n^e terme, $A_n^{\frac{1}{n}}\rho$. Supposons

$$\lim A_n^{\frac{1}{n}}=\lim\frac{A_{n+1}}{A_n}=k$$

alors $k\rho$ sera la limite correspondante à la série des modules. Il s'ensuit donc que, toutes les fois qu'on aura $k\rho<1$, d'où $\rho<\frac{1}{k}$, il y aura convergence dans la proposée, puisque la série des modules sera convergente. Ainsi, on pourra donner à x toutes les valeurs imaginaires dont le module sera plus petit que $\frac{1}{k}$. Parmi ces valeurs imaginaires, il pourra s'en trouver de réelles, lesquelles, prises positivement, seront leurs propres modules. Dès lors, si ces valeurs réelles sont, absolument parlant, inférieures à $\frac{1}{k}$, on pourra affirmer que la série proposée sera convergente. — Si maintenant on prend $\rho>\frac{1}{k}$, la série des modules sera divergente : et comme sa divergence tiendra alors à ce que ses termes successifs ne diminueront plus indéfiniment, il s'ensuit que la série imaginaire sera divergente. — Resterait le cas douteux de $\rho=\frac{1}{k}$.

On voit encore, d'après ce qui précède, que :

Théorème : — Toutes les fois qu'une Série ordonnée par rapport aux puissances croissantes et entières de x sera convergente pour certaines valeurs réelles de la variable, elle restera convergente pour les valeurs imaginaires qui auraient pour modules les valeurs numériques de ces quantités réelles, ou des valeurs numériques plus petites.

Différentiation des Fonctions Transcendantes

Fonctions Logarithmiques.

Soit la fonction
$$y = \text{Log}\, x$$
on aura
$$\Delta y = \text{Log}(x+h) - \text{Log}\, x$$
$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{\text{Log}(x+h) - \text{Log}\, x}{h}$$
$$= \frac{1}{h} \text{Log}\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

Il faut voir ce que devient cette expression pour $h = o$.

Posons $\frac{h}{x} = \frac{1}{n}$ et voyons ce qu'elle deviendra quand n croîtra au-delà de toutes limites. — Il vient alors
$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{n}{x} \text{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{x} \text{Log.}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
Donc
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \text{Lim.}\, \text{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Je vais démontrer que $\text{Lim}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, et il sera prouvé alors que
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \text{Log}\, e\,.$$

Assujettissons d'abord la quantité n à rester entière, tout en pouvant croître au-delà de toutes limites. — Il vient alors, d'après la formule du Binôme, démontrée pour un exposant entier et positif,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1}+\frac{n.(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{1.2\ldots p}\cdot\frac{1}{n^p}+\cdots+\frac{1}{n^n}.$$

ou bien encore

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1.2.3}+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)}{1.2\ldots p}+\cdots+\frac{1}{n^n}$$

Si l'on considère les différents termes écrits, le numérateur des premiers tend vers l'unité lorsque n augmente à l'infini. Ces 1ers termes se confondent donc avec ceux de la série e. Mais il ne faudrait pas conclure de là qu'il en fût de même pour tous les termes. Car, n augmentant, le nombre des termes augmente aussi, et, à la limite, p ou $p-1$ peut être comparable à n, en sorte que l'on n'est pas sûr que la limite de $\frac{p-1}{n}$ soit zéro, par suite que le numérateur $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)$ converge vers l'unité. — Voici comment on démontrera que cependant $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. — Considérons la série e. On peut écrire

$$e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots+\frac{1}{1.2\ldots p}+\varepsilon$$

ε étant une quantité positive: et je puis supposer p assez grand, mais fixe, pour que ε soit $< \delta$, quel que soit δ, fixe d'ailleurs comme p. — On pourra écrire de même

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)}{1.2\ldots p}+\varepsilon'$$

Il est évident que tous les termes de ε' seront plus petits que ceux de ε. Donc $\varepsilon' < \varepsilon$ et à fortiori $\varepsilon' < \delta$. — Actuellement, je puis écrire

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\cdots+\frac{1}{1.2\ldots p}+\varepsilon'-\alpha$$

Il faut bien que je retranche une quantité positive α. Car, en remplaçant les numérateurs des fractions par l'unité, je les ai augmentés, et par suite, j'ai augmenté la somme des fractions. — Comme p est une quantité déterminée, je puis supposer n assez grand pour que $\alpha < \delta$. J'aurai d'ailleurs

$$e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \varepsilon + \alpha - \varepsilon'$$

$$e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2\delta$$

et, comme je puis supposer δ aussi petit que je veux, la différence

$$e - \text{Lim}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

toujours inférieure à 2δ, doit donc être rigoureusement nulle.

Supposons maintenant que n soit fractionnaire, et positif. n sera toujours compris entre deux nombres entiers, p et $p+1$. alors $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sera compris entre les deux quantités

$$\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^p \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{1}{p}\right)^{p+1}$$

qui peuvent encore s'écrire ainsi

$$\frac{\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{p+1}}{1+\frac{1}{p+1}} \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{1}{p}\right)^p\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

quantités qui, toutes deux, convergent vers e quand p augmente indéfiniment. Donc $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ qui est compris toujours entre deux, converge aussi vers la même limite.

Enfin, soit $n = -p$. alors

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{p}\right)^p} = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p = \left(1+\frac{1}{p-1}\right)^p = \left(1+\frac{1}{p-1}\right)^{p-1}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)$$

Donc encore

$$\text{Lim}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

c.q.f.d.

Je vais encore donner une autre démonstration du même principe, due à Mr. Lefébure de Fourcy.

Désignons par E la somme des n premiers termes de e, et appelons N le développement de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, n pour le moment étant supposé fini ; on aura donc :

$$E = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots + \frac{1}{1.2\ldots n}$$

et

$$N = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{n}}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1.2.3} + \cdots + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{1.2\ldots n}$$

on aura évidemment

$$N > 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{n}}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}{1.2.3} + \cdots + \frac{\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}}{1.2\ldots n}.$$

Donc

$$E - N < \frac{1}{1.2}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1.2.3}\left\{1-\left(1-\frac{2}{n}\right)^2\right\} + \frac{1}{1.2.3.4}\left\{1-\left(1-\frac{3}{n}\right)^3\right\} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{1.2\ldots n}\left\{1-\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\right\}$$

Faisons attention aux différences de puissances semblables qui se trouvent entre crochets : on a

$$1-\left(1-\frac{2}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}.2\left\{1+\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}$$

$$1-\left(1-\frac{3}{n}\right)^3 = \frac{1}{n}.3\left\{1+\left(1-\frac{3}{n}\right)+\left(1-\frac{3}{n}\right)^2\right\}$$

$$\cdots\cdots$$

$$1-\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \frac{1}{n}(n-1)\left\{1+\left(1-\frac{n-1}{n}\right)+\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^2+\cdots+\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^{n-2}\right\}$$

Donc

$$E - N < \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3}.2\left\{1+\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\} + \frac{1}{1.2.3.4}3\left\{1+\left(1-\frac{3}{n}\right)+\left(1-\frac{3}{n}\right)^2\right\} + \cdots + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{1.2\ldots n}(n-1)\left\{1+\left(1-\frac{n-1}{n}\right)+\cdots+\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^{n-2}\right\}\right]$$

Inégalité qui comporte à plus forte raison la suivante

$$E - N < \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1.2} + \frac{2.2}{1.2.3} + \frac{3.3}{1.2.3.4} + \cdots + \frac{(n-1)(n-1)}{1.2.3\ldots n}\right\}$$

et à fortiori

$$E - N < \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \cdots + \frac{1}{1.2\cdots(n-2)}\right\}$$

$$< \frac{1}{n}\left\{1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \cdots + \frac{1}{1.2\cdots(n-2)} + \frac{1}{1.2\cdots(n-1)} + \frac{1}{1.2\ldots n}\right\}$$

$$< \frac{1}{n}E$$

Ce résultat est vrai quel que soit n. Or, si n augmente indéfiniment, E tend vers e ; le 2e membre vers zéro ;

D'ailleurs, E étant toujours $> N$, le premier membre ne peut jamais devenir négatif. Donc, à la limite, il est rigoureusement nul, et l'on a

$$e = \lim N = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Il suit de tout cela qu'on a bien

$$\frac{d.\,\text{Log}\,x}{dx} = \frac{1}{x}\,\text{Log}\,e$$

Si l'on prenait les logarithmes dans le système népérien, comme alors $\text{Log}\,e = 1$, on aurait

$$\frac{d\,Lx}{dx} = \frac{1}{x}$$

On sait qu'il existe une relation remarquable entre $\text{Log}\,e$ et La, $\text{Log}\,e$ étant le logarithme de e dans le système dont la base est a, et La le logarithme népérien de a. En effet, on a par définition

$$a^{\text{Log}\,e} = e$$

Prenant les logarithmes népériens des deux membres, il viendra:

$$La\,\text{Log}\,e = 1$$

$$\text{Log}\,e = \frac{1}{La}$$

On peut donc, au lieu de

$$d\,(\text{Log}\,x) = \frac{1}{x}\,\text{Log}\,e\,dx$$

écrire

$$d\,(\text{Log}\,x) = \frac{1}{x\,La}\,dx$$

Si l'on fait $a = 10$, on a

$$\frac{1}{L10} = \text{Log}\,e = 0{,}434294..$$

C'est le nombre par lequel il faut multiplier les logarithmes népériens pour les traduire en logarithmes décimaux.

Au moyen du théorème des fonctions de fonctions, on pourra aussi trouver la différentielle $d\,(\text{Log}\,u)$, u étant

étant une fonction d'x. En effet si, pour plus de simplicité on prend $d(Lu)$ cette différentielle s'obtiendra en prenant la dérivée de Lu comme si u était variable indépendante, c. a d. $\frac{1}{u}$, et multipliant par la différentielle du de la fonction d'x que u représente. Donc

$$d(Lu) = \frac{du}{u}$$

Si par exemple

$$u = x + \sqrt{1+x^2}$$

on aura

$$d(Lu) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

$$= \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Remarque I. — On appelle Intégrale d'une fonction différentielle une expression nouvelle dont la première est la différentielle. L'intégrale de la fonction $\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ est donc $L(x+\sqrt{1+x^2})$. Mais, comme nous savons que deux fonctions qui ont même différentielle peuvent différer par une constante, l'intégrale demandée est en réalité $L(x+\sqrt{1+x^2}) + C$, en désignant par C une constante arbitraire. — Le procédé qui consiste à remonter de la différentielle à l'intégrale s'appelle Intégration. On écrit ainsi le résultat trouvé

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = L(x+\sqrt{1+x^2}) + C$$

Le signe $\int$ s'énonce Intégrale ou Somme. — De même, chaque théorème de calcul différentiel aura son inverse dans le calcul intégral.

Remarque II. — Comme la différentiation des Logarithmes est indépendante des résultats trouvés à propos des fonctions algébriques, on pourra, de la formule qui donne la différentielle d'un Logarithme, déduire quelques uns des résultats déjà

connues pour les fonctions algébriques.

Soit par exemple

$$y = u^m$$

u étant fonction d'x. En prenant les Logarithmes des deux membres, on a

$$Ly = m\,Lu$$

d'où

$$\frac{dy}{y} = m\,\frac{du}{u}$$

$$dy = \frac{my}{u}\,du$$

$$= mu^{m-1}\,du.$$

résultat déjà trouvé.

Soit encore le produit

$$y = u.v.w$$

Si nous prenions les Logarithmes des deux membres, comme les facteurs u, v, w peuvent être négatifs, nous pourrions avoir à considérer des Symboles Illusoires. — Pour éviter cette difficulté, on élève les deux membres au carré. Il vient

$$y^2 = u^2 v^2 w^2$$

D'où

$$Ly^2 = L.u^2 + L.v^2 + L.w^2$$

$$\frac{d.y^2}{y^2} = \frac{d.u^2}{u^2} + \frac{d.v^2}{v^2} + \frac{d.w^2}{w^2}$$

ou

$$\frac{2y\,dy}{y^2} = \frac{2u\,du}{u^2} + \frac{2v\,dv}{v^2} + \frac{2w\,dw}{w^2}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}$$

Formule également connue.

Fonctions Exponentielles.

Soit

$$y = a^x$$

Prenant de part et d'autre les Logarithmes Népériens, on a

$$x\,La = Ly$$

Différentions maintenant les deux membres en regardant y comme une fonction d'x : on aura

$$\frac{dy}{y} = La . dx$$

Donc

$$dy = y\,La . dx$$

$$= a^x La . dx$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x La \qquad (y = a^x).$$

Supposons qu'il s'agisse de

$$y = a^u$$

u étant une fonction quelconque de x. On aura

$$\frac{d.a^u}{dx} = a^u La \frac{du}{dx}$$

Dans le cas de $a = e$, il vient

$$\frac{d.e^u}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

et si $u = x$

$$\frac{d.e^x}{dx} = e^x$$

Donc la dérivée de l'exponentielle Népérienne e^x est égale à cette exponentielle elle-même.

On pourrait se proposer de trouver si l'exponentielle Népéri-enne est la seule fonction qui jouisse de la propriété d'être égale à sa dérivée. — Soit

$$y = f(x)$$

une fonction remplissant cette condition. On doit alors avoir

$$\frac{d.f(x)}{dx} = f(x)$$

D'où

$$d.f(x) = f(x)\,dx$$

$$\frac{d.f(x)}{f(x)} = dx$$

Mais le premier membre est la différentielle de $L.f(x)$. Donc

$$L.f(x) = x + C'$$

cette constante C' est quelconque. On peut la poser égale à Lc.

Donc

$$L\,f(x) = x + Lc$$

$$L\,\frac{f(x)}{c} = x$$

D'où

$$e^x = \frac{f(x)}{c}$$

$$f(x) = C.e^x$$

ce qui prouve qu'en effet l'exponentielle Népérienne est la seule fonction qui soit égale à sa dérivée.

Puisque la dérivée de l'exponentielle Népérienne est si simple, il doit être utile dans certains cas de convertir une exponentielle quelconque en exponentielle Népérienne. Cherchons à le faire. – Soit a^u une exponentielle quelconque. Posons

$$a^u = e^z$$

D'où

$$u\,La = z$$

Donc

$$a^u = e^{u\,La}$$

Voici un exemple de l'utilité que présente cette transformation. – Soit à différentier

$$y = u^v$$

u et v étant des fonctions de x. On aura

$$d.u^v = d.e^{vLu} = e^{vLu}\,d.vLu$$

or

$$d.vLu = v\,dLu + Lu\,dv = v\frac{du}{u} + Lu\,dv = \frac{v\,du + u\,Lu\,dv}{u}$$

Par suite $$d.u^v = e^{vLu} \cdot \frac{vdu + uLudv}{u}$$

$$= u^{v-1} (vdu + uLu.dv)$$

Remarque. — La forme dela dérivée d'un Logarithme nous permettra de retrouver ici le Théorème fondamental de la Théorie des Racines Egales.

En effet, proposons-nous de différentier la fonction

$$y = L.f(x) = L.\{(x-a)^n (x-b)^p (x-c)^q\}$$

on aura

$$y = nL(x-a) + pL(x-b) + qL(x-c)$$

D'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{x-a} + \frac{p}{x-b} + \frac{q}{x-c}$$

Mais on a $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Donc $$f'(x) = \frac{nf(x)}{x-a} + \frac{pf(x)}{x-b} + \frac{qf(x)}{x-c}$$

et l'on démontre ainsi que la dérivée d'une fonction est égale à la somme des quotients de la fonction par chacun de ses facteurs simples.

Différentiation des Fonctions Inverses.

Soit $y = f(x)$ une fonction : on peut supposer que ce soit à y que l'on donne des accroissements arbitraires, et que par suite x soit la variable indépendante, de sorte qu'on peut regarder x comme une fonction de y, $x = \varphi(y)$. — or, quand on sait trouver la dérivée de l'une de ces fonctions, on peut facilement avoir celle de l'autre. En effet, si Δx et Δy sont deux accroissements correspondants de x et de y,

tirés indistinctement de l'une ou l'autre des équations

$$y = f(x)$$

$$x = \varphi(y)$$

qui, en réalité reviennent au même, on aura identiquement

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)}.$$

Cette identité devra encore se vérifier à la limite, de façon qu'on pourra écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$$

ou bien

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

Ce qui montre que

Les dérivées de deux fonctions inverses sont les inverses l'une de l'autre.

Comme exemple, sachant que

$$\frac{d.\,\mathrm{Log}\,x}{dx} = \frac{1}{x\,\mathcal{L}a}$$

on pourrait en déduire celle de la fonction inverse, c.à.d. de

$$y = a^x$$

En effet, on tire de là

$$x = \mathrm{Log}\,y$$

donc

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y\,\mathcal{L}a} = \frac{1}{a^x\,\mathcal{L}a}$$

donc

$$\frac{dy}{dx} = a^x\,\mathcal{L}a$$

Fonctions Circulaires.

1°. Soit à prendre la dérivée de la fonction

$$y = \sin x$$

on aura

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\Delta x \cos\left(\frac{1}{2}\Delta x + x\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)$$

et, à la limite

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

2°. Soit

$$y = \cos x.$$

on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \frac{2\sin\left(\frac{1}{2}\Delta x + x\right)\sin\left(-\frac{1}{2}\Delta x\right)}{\Delta x} = -\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\sin\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x.$$

Ce résultat a été trouvé directement, on pouvait encore le déduire du précédent. Car

$$\cos x = \sqrt[2]{1-\sin^2 x}$$

Donc

$$d.\cos x = d.\sqrt[2]{1-\sin^2 x} = \frac{d(1-\sin^2 x)}{2\sqrt[2]{1-\sin^2 x}} = -\frac{2\sin x\cos x\,dx}{2\cos x} = -\sin x\,dx$$

$$\frac{d.\cos x}{dx} = -\sin x \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Enfin on peut arriver plus simplement encore. – Nous avons

$$\frac{d.\sin x}{dx} = \cos x$$

Donc

$$\frac{d.\sin u}{dx} = \cos u.\frac{du}{dx}$$

Cela posé, je remarque que

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Donc

$$\frac{d.\cos x}{dx} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{dx} = -\sin x$$

Il est facile de se rendre compte de ce fait que les dérivées de $\sin x$ et de $\cos x$ sont de signes contraires, en remarquant que, dans le 1er quadrant par ex. le sinus croît quand x croît, et le cosinus au contraire diminue.

3°. Soit

$$y = \operatorname{Tang} x$$

on aura

$$d\,\operatorname{Tg} x = d.\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x\, d.\sin x - \sin x\, d.\cos x}{\cos^2 x} = \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d.\operatorname{Tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Maintenant, on trouvera avec facilité

$$\frac{d.\operatorname{Sec} x}{dx} = \operatorname{Tg} x \operatorname{Sec} x$$

$$\frac{d.\operatorname{Cosec} x}{dx} = -\operatorname{Cotg} x \operatorname{Cosec} x$$

$$\frac{d.\operatorname{Cot} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Fonctions Circulaires Inverses.

Ce sont les fonctions de la forme

$$y = \operatorname{arc}\sin x.$$

Ces fonctions ne sont pas déterminées comme celles dont elles sont les inverses, car, à un même sinus par exemple, correspondent une infinité d'arcs représentés par les deux formules $2k\pi + a$ et $(2k+1)\pi - a$.

On peut prévoir ici que la dérivée aura deux valeurs. Car,

Si l'on différentie par ex. les deux arcs

$$y' = 2k\pi + \alpha$$
$$y'' = (2k+1)\pi - \alpha$$

on aura

$$dy' = d\alpha$$
$$dy'' = -d\alpha$$

Donc la dérivée aura deux valeurs égales et de signes contraires.

Soit maintenant à différentier

$$y = \text{arc}\sin x$$

on en tire

$$x = \sin y$$
$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

Donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Et l'on saura, dans chaque cas particulier, quel signe il faut prendre, puisque le radical représente un cosinus.

Soit

$$y = \text{arc}\cos x$$

d'où

$$x = \cos y$$
$$\frac{dx}{dy} = -\sin y$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

On pourrait à priori prouver que les dérivées de arc sin x et de arc cos x doivent bien avoir un signe contraire, ce serait la même chose que pour sin x et cos x. — On peut aussi voir d'avance que ces deux dérivées doivent toujours avoir même valeur absolue. — Pour cela, il suffit de prouver que l'on a toujours entre les arcs la relation

Car de là on tire
$$\text{arc Cos}\,x \pm \text{arc Sin}\,x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$d(\text{arc Cos}\,x) \pm d(\text{arc Sin}\,x) = 0$$

or les arcs dont le sinus est x sont

$$(1)\quad \begin{cases} 2k\pi + \alpha \\ (2k+1)\pi - \alpha \end{cases}$$

et ceux dont le cosinus est x sont

$$(2)\quad \begin{cases} 2k\pi + \alpha' \\ 2k\pi - \alpha' \end{cases}$$

α et α' étant $< \frac{\pi}{2}$ et étant liés par la relation

$$\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2}$$

or il est évident que si l'on prend une quelconque des formules (1) avec une des formules (2), on aura, en les ajoutant ou les retranchant suivant les cas, un résultat qui sera toujours de la forme

$$(2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

ce qui démontre la proposition.

Soit
$$y = \text{arc Tg}\,x$$

on a
$$x = \text{Tg}\,y$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\text{Cos}^2 y} = 1 + x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

---

on trouverait
$$\frac{d.\,\text{arc Cot}\,x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d.\,\text{arc Sec}\,x}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d.\,\text{arc Cosec}\,x}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Comme application, cherchons à différentier l'expression

$$y = \arccos \frac{b+a\cos x}{a+b\cos x} \qquad a > b$$

Posons, pour plus de commodité

$$u = \frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}$$

Nous aurons

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

or

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{a+b\cos x}{\sqrt{a^2+b^2\cos^2 x+2ab\cos x-b^2-a^2\cos^2 x-2ab\cos x}} = \frac{a+b\cos x}{\sin x\sqrt{a^2-b^2}}$$

et

$$\frac{du}{dx} = \frac{-a\sin x(a+b\cos x)+b\sin x(b+a\cos x)}{(a+b\cos x)^2} = -\frac{(a^2-b^2)\sin x}{(a+b\cos x)^2}$$

Donc, en substituant et réduisant,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$$

Dérivée très-simple, dont on apercevrait difficilement l'intégrale.

Soit encore

$$y = l\,\frac{b+a\cos x+\sin x\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x}$$

Posons

$$\frac{b+a\cos x+\sin x\cdot\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x} = u$$

on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{a+b\cos x}{b+a\cos x+\sin x\sqrt{b^2-a^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

or

$$\frac{du}{dx} = \frac{b\sin x\left(b+a\cos x+\sin x\sqrt{b^2-a^2}\right)+\left(\cos x\sqrt{b^2-a^2}-a\sin x\right)(a+b\cos x)}{(a+b\cos x)^2} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}\left(b+a\cos x+\sin x\sqrt{b^2-a^2}\right)}{(a+b\cos x)^2}$$

Substituant, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x}$$

Cette dérivée ne diffère de la précédente que par le facteur $\sqrt{-1}$. Donc l'intégrale de la première, multipliée par $\sqrt{-1}$, doit être identiquement égale à celle de la seconde, multipliée par une constante arbitraire. Donc on doit avoir

$$\arccos\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,l\,\frac{b+a\cos x+\sin x\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x} + C$$

Cette égalité doit avoir lieu qq. soit x. Or, si l'on y fait $x=0$, on a $0=0+C$, donc $C=0$, et

$$(1)\qquad \arccos\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,l\,\frac{b+a\cos x+\sin x\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x}$$

Soit u le plus petit des arcs représentés par le 1er membre. Posons

$$\cos u = \frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}$$

et par suite

$$\sin u = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 u}} = \frac{1}{a+b\cos x}\sqrt{a^2+b^2\cos^2 x-2ab\cos x-b^2-a^2\cos^2 x+2ab\cos x} = \frac{\sin x\cdot\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$$

Substituant dans l'éq. (1), on aura donc

$$u = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,l\left(\cos u+\sqrt{-1}\sin u\right)$$

$$u\sqrt{-1} = l\left(\cos u+\sqrt{-1}\sin u\right)$$

ce qui donne, par définition,

$$e^{u\sqrt{-1}} = \cos u + \sqrt{-1}\,\sin u$$

formule remarquable, à laquelle nous arriverons bientôt par d'autres considérations.

Dérivées et Différentielles des Divers ordres.

Soit
$$y = f(x)$$
on désigne la dérivée par
$$y' = f'(x)$$
La dérivée de $f'(x)$ s'appelle Seconde dérivée, et s'indique ainsi
$$y'' = f''(x)$$
et ainsi de suite.

La notation différentielle de y' était $\frac{dy}{dx}$. on tire delà
$$f'(x)\,dx = dy$$
Si je différentie les deux membres, en supposant que dx soit un accroissement constant quel que soit x, j'aurai
$$d.dy = dx.\,f''(x)\,dx$$
ce que l'on représente ainsi
$$d^2y = f''(x)\,dx^2$$
D'où
$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$
C'est la notation différentielle de la seconde dérivée. — on aurait de même
$$y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$$
et ainsi de suite.

Si dx n'avait pas été constant, c.àd. si c'était une fonction variable avec x, on aurait eu
$$d^2y = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x$$
D'où
$$f''(x) = \frac{d^2y - f'(x)\,d^2x}{dx^2} = \frac{d^2y - \frac{dy}{dx}\,d^2x}{dx^2} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$$
et cette formule redevient $\frac{d^2y}{dx^2}$ si l'on suppose que dx est une constante.

On est conduit qqf. à supposer que dx n'est pas constant quand x varie. S'il s'agit de la trajectoire d'un mobile, x est une fonction du temps, $x = \varphi(t)$, et $dx = \varphi'(t)\,dt$. dx n'est donc pas une constante, à moins que $\varphi(t)$ ne soit une

une fonction Linéaire : car alors $\varphi'(t)$ serait constant, indépendant de t, de sorte que t variant, dx ne changerait pas.

Considérons comme exemple quelques fonctions transcendantes :

Soit $y = Lx$: on aura

$$\frac{dy}{dx} = x^{-1} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -x^{-2} \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 1.2\, x^{-3} \quad \frac{d^4y}{dx^4} = -1.2.3.4\, x^{-4} \dots$$

Soit

$$y = a^x \quad , \quad \frac{dy}{dx} = a^x La \quad \frac{d^2y}{dx^2} = a^x (La)^2 \dots \frac{d^ny}{dx^n} = a^x (La)^n.$$

Soit

$$y = \sin x \quad \frac{dy}{dx} = \cos x \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \sin x$$

ainsi, après 4 dérivations successives, on revient à la fonction primitive.
Même résultat pour le Cosinus.
Pour la tangente, le calcul n'amène aucun résultat remarquable.
Soit

$$y = \text{arc} \sin x$$

on a $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ résultat algébrique pour le 1er coefficient différentiel, et par suite pour tous les autres.

Fonctions Implicites.

Soit

$$u = f(x, y) = 0$$

y est une fonction implicite d'x qu'on peut représenter par

$$y = \varphi(x)$$

de sorte qu'on a identiquement

$$f(x, \varphi(x)) = 0$$

quel que soit x. Donc la différentielle du 1er membre doit être nulle. Donc on aura, en différentiant d'après le théorème des fonctions de fonctions

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$$

et l'on a ainsi la dérivée $\frac{dy}{dx}$ sans être obligé de résoudre l'Eq. $f(x,y) = 0$.

Ce Résultat est de la forme

$$(1) \qquad M + N\frac{dy}{dx} = 0$$

$M, N, \frac{dy}{dx}$ étant des fonctions d'x et d'y.

Cherchons maintenant $\frac{d^2y}{dx^2}$. Différentions l'Eq. (1) : la différentielle du 1er. membre sera nulle, puisque ce 1er. membre est constant. — on aura donc, toujours d'après les propriétés des fonctions de fonctions,

$$\frac{dM}{dx} + \frac{dM}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}\left\{\frac{dN}{dx} + \frac{dN}{dy}\frac{dy}{dx}\right\} + N\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Eq. qui donnera $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Pour avoir $\frac{d^3y}{dx^3}$, on différentierait encore, et ainsi de suite.

Les Equations qu'on trouve ainsi, et qui donnent $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ... s'appellent Equations Différentielles Immédiates. — on nomme simplement Equations Différentielles celles qu'on obtient en éliminant un ou plusieurs paramètres arbitraires entre l'Eq. proposée et ses Eq. Différentielles Immédiates.

ainsi, soit l'Eq.

$$y^2 = 2mx + nx^2 \qquad (1)$$

Différentiant, nous aurons ses Eq. Différentielles Immédiates :

$$y\frac{dy}{dx} = m + nx \qquad (2)$$

et

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = n \qquad (3)$$

Si, entre ces 3 Equations, on élimine les constantes m et n, on aura

$$y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + yx^2\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

Eq. Différentielle du 2d ordre.

on en aurait du 1er. ordre en éliminant m ou n entre les Equations (1) et (2).

Supposons maintenant qu'on cherche $\frac{dy}{dx}$, ayant les deux équations

$$f(x, y, z) = 0$$

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

Dans chaque Eq. nous supposerons y et z remplacés en fonction de x. — En différentiant, il viendra

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dx} = 0$$

En éliminant $\frac{dz}{dx}$ entre ces deux équations, on en aura une qui donnera $\frac{dy}{dx}$. — Les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dy}{dx}$ seront les coefficients angulaires des tangentes aux projections de la courbe sur les plans des xz et des xy.

On arriverait de même s'il y avait n équations entre n+1 inconnues.

Série de Taylor.

On sait que, dans le cas des fonctions entières à une seule variable, on a toujours

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \cdots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x)$$

Si $f(x)$ n'est pas une fonction entière, ce développement ne subsiste plus. — Cependant, on est naturellement conduit à l'appliquer à une fonction quelconque : et comme alors il ne s'arrêterait pas, on devra chercher l'expression du reste R, c. à d. du terme complémentaire qu'on devra écrire à la suite du dernier considéré, pour que le 2^d. membre représente exactement la valeur du 1er.

Posons donc en toute généralité

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \cdots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x) + R$$

et calculons R : nous devrons trouver une quantité qui deviendra nulle pour le cas des fonctions entières.

Je pose

$$x + h = z$$

d'où

$$h = z - x$$

alors j'aurai

$$R = f(z) - f(x) - (z-x) f'(x) - \frac{(z-x)^2}{1.2} f''(x) - \cdots - \frac{(z-x)^n}{1.2\ldots n} f^n(x)$$

R est donc une fonction de x et de z. Et remarquons que z et x sont complètement indépendants l'un de l'autre : je puis faire varier x en considérant z comme constant, et vice versâ. — Cela posé, je puis donc prendre la dérivée du second membre par rapport à x. J'aurai :

$$\frac{dR}{dx} = \left\{ \begin{array}{l} -f'(x) - (z-x)f''(x) - \frac{(z-x)^2}{1.2}f'''(x) - \cdots - \frac{(z-x)^n}{1.2\ldots n}f^{n+1}(x) \\ +f'(x) \quad + (z-x)f''(x) + \cdots + \frac{(z-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n}(x) \end{array} \right\}$$

$$\frac{dR}{dx} = -\frac{(z-x)^n}{1.2\ldots n} f^{n+1}(x) \qquad (1)$$

Remarquons ici que, si la dérivée $(n+1)^e$ de $f(x)$ était une constante C, la dérivée de R deviendrait $-C\frac{(z-x)^n}{1.2..n}$, et il serait facile de trouver R qui évidemment serait égal à la quantité $C\frac{(z-x)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$. En d'autres termes, on a l'identité

$$\frac{d}{dx}\left\{ \frac{C(z-x)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} \right\} = -C\frac{(z-x)^n}{1.2\ldots n} \qquad (2)$$

Retranchant l'identité (2) de l'Eq. (1) membre à membre, on aura

$$\frac{d}{dx}\left\{ R - C\frac{(z-x)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} \right\} = \frac{(z-x)^n}{1.2\ldots n}\left\{ C - f^{n+1}(x) \right\} \qquad (3)$$

Je supposerai, dans tous les raisonnements qui vont suivre, que $f^{n+1}(x)$ est une fonction finie pour toutes les valeurs de x que je considère. — alors, si j'imagine que x croisse d'une manière continue de x à z $(h>0)$, $f^{n+1}(x)$ prendra différentes valeurs finies. Soit M la plus grande et m la plus petite de ces valeurs. — Si, dans l'Eq. (3) je remplace C (const. arbitraire) par M:

$$\frac{d}{dx}\left\{ R - M\frac{(z-x)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} \right\} = \frac{(z-x)^n}{1.2\ldots n}\left\{ M - f^{n+1}(x) \right\}$$

le second membre sera évidemment positif pour toute valeur de x comprise entre x et z. Donc le premier le sera aussi. Or le 1er membre est une dérivée. Si donc il reste positif, c'est que la fonction correspondante, $R - M\frac{(z-x)^{n+1}}{1.2..(n+1)}$, est croissante de x à z. Mais, pour $x=z$, cette fonction se réduit à R, c.à.d. à zéro (car, en se reportant à la

valeur de R, on voit que R=0 pour $x=z$) ; or elle a été constamment en croissant ; donc, de x à z, elle était négative. Donc

$$R < M \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$$

Si de même, dans l'égalité (3), on remplaçait C par m, on trouverait par un raisonnement semblable,

$$R > m \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$$

ainsi on a déterminé, pour le cas de $h>0$, deux limites qui comprennent R. — Il est facile de voir que ces deux limites subsistent encore si $h<0$. alors en effet $z<x$, de sorte que x décroît de x à z, ou bien croît de z à x. Revenons à la formule (3), et remplaçons encore C par M et m successivement ; et supposons d'abord n pair. Il vient

$$\frac{d}{dx}\left\{R - M\frac{(z-x)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\right\} = \frac{(z-x)^n}{1.2\ldots n}\left\{M - f^{n+1}(x)\right\}$$

Le second membre est >0, puisque n est pair. Donc le 1er le sera aussi. Par suite, la fonction dont il est la dérivée devra être croissante ; et comme elle est nulle pour $x=z$, elle sera positive de z à x. Donc

$$R > M \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$$

on verrait de même que

$$R < m \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$$

ainsi R reste toujours compris entre les mêmes limites déjà trouvées, seulement les signes > et < sont intervertis : cela tient à ce que $(z-x)^{n+1}$ devient négatif. — Si n est impair, on arrive au même résultat que pour $h>0$.

Donc, en résumé, quel que soit le signe de h, R est toujours compris entre les deux limites

$$M\frac{(z-x)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} \quad \text{et} \quad m\frac{(z-x)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$$

M est la plus grande, m la plus petite des valeurs que prend $f^{n+1}(x)$ quand x varie de x à $x+h$. — Je puis donc poser

$$R = \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} \mathcal{M}(m,M)$$

$\mathcal{M}(m,M)$ désignant une certaine valeur inconnue, intermédiaire ou moyenne entre m et M. — Si je suppose actuellement que $f^{n+1}(x)$ soit une fonction continue, cela voudra dire qu'elle passera, quand x ira de x à z, par toutes les nuances de grandeur comprises entre m et M. Donc il existera une certaine valeur de x, que je représenterai par $x+\theta h$. $(0<\theta<1)$, comprise entre x et $x+h$, pour laquelle $f^{n+1}(x)$ atteindra rigoureusement $\mathcal{M}(m,M)$. J'aurai alors, en remplaçant $(z-x)$ par h,

$$R = \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{n+1}(x+\theta h)$$

De sorte que la série de Taylor devient définitivement

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \cdots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(x) + \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}f^{n+1}(x+\theta h)$$

Remarquons que cette formule n'est pas ici une série : c'est un polynôme limité. Elle suppose essentiellement que la dérivée $f^{n+1}(x)$ soit finie et continue de x à $x+h$.

Il est facile de voir d'ailleurs que c'est la seule condition nécessaire pour que la formule soit applicable. — Il suffit de constater pour cela si, $f^{n+1}(x)$ étant une fonction finie et continue, toutes les dérivées précédentes le sont également. Or en général

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h\{\varphi'(x) + \varepsilon\}$$

Si $\varphi'(x)$ est fini, $\varphi(x)$ est continu. En effet, quand h converge vers zéro, le 2d membre a zéro pour limite, puisque $\varphi'(x)$ est fini. Donc le 1er membre aussi diminue indéfiniment. Donc $\varphi(x)$ est continu. Donc si en général $F^p(x)$ est fini, $F^{p-1}(x)$ l'est aussi, et par suite $F^{p-2}(x)$, $F^{p-3}(x)$, etc. ainsi.

Pour que la série de Taylor soit vraie, il faut et il suffit que, de x à $x+h$, $f^{n+1}(x)$ soit fini et continu.

Si maintenant on suppose que ce terme complémentaire $\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{n+1}(x+\theta h)$ ait pour limite zéro quand n croît indéfiniment, alors on pourra poursuivre le développement jusqu'à l'infini, et $f(x+h)$ représentera rigoureusement la somme de la série ainsi formée.

Si au contraire la fonction $f(x)$ est telle que le terme complémentaire ne converge pas vers zéro, il est évident que le second membre ne pourrait être remplacé par la série qu'on forme en augmentant n jusqu'à l'infini, et négligeant R: $f(x+h)$ ne serait point la somme d'une pareille série.

Il est donc extrêmement important de constater si R a zéro pour limite.

Un cas fort étendu, où l'on constate précisément que R a pour limite zéro, c'est celui où $f^n(x)$ reste fini quelque grand que soit n. — Pour démontrer qu'alors R décroît indéfiniment, il suffit de démontrer que $\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$ a pour limite zéro. Or, si h est compris entre p et $p+1$, on a

$$\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} = \frac{h^p}{1.2\ldots p}\cdot\frac{h}{p+1}\cdot\frac{h}{p+2}\cdots\cdots\frac{h}{n+1}$$

$\frac{h^p}{1.2\ldots p}$ est une quantité finie, soit P. Tous les autres facteurs du 2d membre sont <1, et si k est une fraction proprement dite plus grande que le plus grand d'entre eux, leur produit

sera plus petit que k répété autant de fois qu'il y a de facteurs, c.a.d. que k^{n-p} et l'on aura

$$\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} < P\,k^{n-p}$$

P est constant : k^{n-p} converge vers zéro quand n augmente indéfiniment. Donc $\lim \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} = 0$ c.q.f.d.

Si nous prenons par ex. pour $f(x)$, e^x, $\sin x$ ou $\cos x$, la formule de Taylor donnera un développement en série, puisque toutes les dérivées sont finies.

La condition que nous venons de trouver suffisante pour que $\lim R = 0$, n'est pas évidemment nécessaire ; et il est facile de comprendre que R pourrait tendre vers zéro sans que $f^n(x)$ restât fini : car, en général, le coefficient numérique du reste tend vers zéro : si $f^n(x)$ était infini, on aurait donc la forme illusoire $R = 0.\infty$; donc R pourrait tendre vers zéro.

Le Reste de la Série de Taylor peut encore se mettre sous deux autres formes. La première s'obtient aisément en écrivant

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(x) + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(x+\theta h) - \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(x) + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(x)$$

d'où l'on tire

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \cdots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(x) + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\left\{ f^n(x+\theta h) - f^n(x) \right\}$$

Sous cette forme, on voit qu'on peut toujours rendre h assez petit pour que le rapport du reste au terme auquel on s'arrête soit plus petit que toute quantité donnée, pourvu toutefois que la dérivée qui entre dans ce terme ne soit pas nulle. — En effet, ce rapport est $\frac{1}{f^n(x)}\left\{ f^n(x+\theta h) - f^n(x) \right\}$

Si h tend vers zéro, $f^n(x+\theta h) - f^n(x)$ diminue indéfiniment. Donc le rapport a bien zéro pour limite, si $f^n(x)$ n'est pas nul.

Enfin, il y a une 3e forme du reste qui est utile à connaître. — Ce reste R est une certaine fonction de x. Je puis poser

$$R = \varphi(x)$$

ou bien

$$R = \varphi(z + \overline{x-z}) = \varphi(z) + \varphi'(z+\theta[x-z]) \times (x-z)$$

en développant d'après la 1re formule de Taylor, et y faisant $n=0$. Mais $\varphi(z)$ est nul : c'est ce que devient R quand $x=z$. Donc enfin

$$R = (x-z)\,\varphi'(z+\theta[x-z])$$

Maintenant, on a vu, dans la démonstration de la formule, que $\frac{dR}{dx}$, c.à.d. $\varphi'(x)$, était

$$\varphi'(x) = -f^{n+1}(x)\frac{(z-x)^n}{1.2\ldots n}$$

Changeant x en $z+\theta(x-z)$ et multipliant les deux membres par $(x-z)$, on voit que le 1er membre se réduit à R :

$$R = f^{n+1}(x+\theta(x-z)) \cdot \frac{\theta^n(z-x)^{n+1}}{1.2\ldots n}$$

ou

$$R = \frac{\theta^n h^{n+1}}{1.2\ldots n} f^{n+1}(x+(1-\theta)h)$$

car $z+\theta(x-z) = \theta x + z(1-\theta) = \theta x + (x+h)(1-\theta) = x + h(1-\theta)$. Maintenant, $1-\theta$ est une fraction de même nature que θ. Donc, en posant $1-\theta = \theta_1$, il vient

$$R = \frac{h^{n+1}(1-\theta_1)^n}{1.2\ldots n} f^{n+1}(x+\theta_1 h)$$

et d'ailleurs il est évident qu'on peut omettre l'indice.

Donc, en résumé, les trois formes de la série de Taylor sont:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \cdots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(x) + R \quad \begin{cases} R = \dfrac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{n+1}(x+\theta h) \\ R = \dfrac{h^n}{1.2\ldots n}\left\{f^n(x+\theta h) - f^n(x)\right\} \\ R = \dfrac{h^{n+1}}{1.2\ldots n}(1-\theta)^n f^{n+1}(x+\theta h) \end{cases}$$

Voici maintenant une autre démonstration de la série de Taylor, donnée à la Sorbonne par M. Lefebure.

Soit

$$y = f(x)$$

Supposons que l'on change x en X et que y devienne Y. On aura

$$Y = f(X)$$

donc

$$Y - y = f(X) - f(x)$$

Nous nous proposons de développer $Y-y$ suivant les puissances ascendantes de l'accroissement $X-x$. On peut poser

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{f(X)-f(x)}{X-x} = P$$

ou

$$Y = y + P(X-x) \qquad (1)$$

Cette Eq. est une identité, en y prenant pour X et x des quantités quelconques et pour y et Y les valeurs $f(x)$ et $f(X)$ correspondantes. On peut donc considérer X et Y comme constantes, et x et y comme variables. Donc, en différentiant, on aura

$$\frac{dy}{dx} + \frac{dP}{dx}(X-x) - P = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2P}{dx^2}(X-x) - 2\frac{dP}{dx} = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^3P}{dx^3}(X-x) - 3\frac{d^2P}{dx^2} = 0 \qquad (4)$$

$$\ldots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} + \frac{d^nP}{dx^n}(X-x) - n\frac{d^{n-1}P}{dx^{n-1}} = 0 \qquad (n+1)$$

et encore

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + \frac{d^{n+1}P}{dx^{n+1}}(X-x) - (n+1)\frac{d^nP}{dx^n} = 0 \qquad (\alpha)$$

Ajoutons toutes les Eq. (1) (2) ... (n+1) membre à membre, après les avoir multipliées respectivement par $1, \frac{X-x}{1}, \frac{(X-x)^2}{1.2}, \ldots \frac{(X-x)^n}{1.2\ldots n}$. Il viendra

$$Y = y + \frac{dy}{dx}(X-x) + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{(X-x)^2}{1.2} + \cdots + \frac{d^ny}{dx^n}\frac{(X-x)^n}{1.2\ldots n} + \frac{d^nP}{dx^n}\cdot\frac{(X-x)^{n+1}}{1.2\ldots n}$$

La quantité $\frac{d^nP}{dx^n}$ est inconnue : mais nous pourrons en chercher deux limites, et par conséquent en déduire deux limites de Y.

Considérons une fonction u ainsi composée

$$u = \left(C - \frac{d^nP}{dx^n}\right)(X-x)^{n+1}$$

C étant une constante. — Supposons que pour C, on ait pu trouver une valeur C, telle que, pour des valeurs de x comprises entre X et x, $\frac{du}{dx}$ soit toujours >0. Dans ce cas, u est une fonction croissante. Mais, quand x deviendra égal à X, u sera nul.

Donc auparavant u était <0, donc $\frac{d^nP}{dx^n} > C_1$, car $X-x$ était >0 avant $x=X$. Si au contraire C_2 est tel que, de x à X, on ait $\frac{du}{dx} < 0$, u décroît, et $\frac{d^nP}{dx^n} < C_2$. Si donc nous trouvons C_1 et C_2 d'après ces conditions, nous aurons les deux limites cherchées. – Prenons donc la valeur de $\frac{du}{dx}$. Nous aurons

$$\frac{du}{dx} = -\left(C - \frac{d^nP}{dx^n}\right)(X-x)^n(n+1) - \frac{d^{n+1}P}{dx^{n+1}}(X-x)^{n+1} = (X-x)^n\left\{-(n+1)C + (n+1)\frac{d^nP}{dx^n} - (X-x)\frac{d^{n+1}P}{dx^{n+1}}\right\}$$

C'est maintenant que nous allons nous servir de l'Eq. (α) pour simplifier $\frac{du}{dx}$. Il vient

$$\frac{du}{dx} = (X-x)^n\left\{-(n+1)C + \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right\}$$

or, depuis x jusqu'à X, le facteur $(X-x)^n$ est >0. Donc il suffit de chercher une valeur de C qui rende le 2^d facteur >0 dans l'intervalle demandé. – Soit m la plus petite valeur que prend $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ dans l'intervalle, et déterminons C_1 d'après la condition

$$-(n+1)C_1 + m = 0$$

et cette valeur sera telle que $\frac{du}{dx}$ ne pourra pas être négatif dans l'intervalle. – De même, soit M la plus grande valeur de $\frac{d^{n+1}y}{dx^n}$, et déterminons C_2 d'après l'Eq.

$$-(n+1)C_2 + M = 0$$

on a ainsi, pour les deux limites

$$C_1 = \frac{m}{n+1} \qquad C_2 = \frac{M}{n+1}$$

Si μ est une valeur intermédiaire entre m et M, il existera donc une valeur de μ, inconnue, telle qu'elle aura exactement $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{\mu}{n+1}$, et l'on pourra écrire

$$Y = y + \frac{dy}{dx}(X-x) + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{(X-x)^2}{1.2} + \dots + \frac{d^ny}{dx^n}\frac{(X-x)^n}{1.2\dots n} + \mu\frac{(X-x)^{n+1}}{1.2\dots(n+1)}.$$

ou, ce qui revient au même,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \dots + \frac{h^n}{1.2\dots n}f^n(x) + \frac{h^{n+1}}{1.2\dots(n+1)}f^{n+1}(x+\theta h)$$

Série de Maclaurin.

Elle se déduit de celle de Taylor en faisant $x=0$ et changeant h en x : Il vient

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{1.2\dots n}f^n(0) + R \quad \left\{\begin{array}{l} R = \frac{x^{n+1}}{1.2\dots(n+1)}f^{n+1}(\theta x) \\ R = \frac{x^n}{1.2\dots n}\left\{f^n(\theta x) - f^n(0)\right\} \\ R = \frac{x^{n+1}}{1.2\dots n}(1-\theta)^n f^{n+1}(\theta x) \end{array}\right.$$

Application des Séries de Taylor et Maclaurin au Développement des Fonctions.

La Série de Maclaurin est souvent très-commode, en ce qu'elle permet d'exprimer une fonction quelconque suivant les puissances ascendantes de la variable.

Si $f(x) = e^x$, la série de Maclaurin donne

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

Si $f(x) = \sin x$, on aura

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\sin x \quad \text{d'où} & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\ f^{\text{IV}}(x) &= \sin x & f^{\text{IV}}(0) &= 0 \\ &\cdots & &\cdots \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2\ldots7} + \cdots$$

---

on trouve de même

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots6} + \cdots$$

on aurait pu prévoir que, dans $\sin x$, il ne pouvait y avoir que des puissances impaires de x et des puissances paires dans $\cos x$; car, si l'on change x en $-x$, le

le sinus change de signe, et le cosinus reste le même.

Dans $\sin x$, comme dans $\cos x$, il est évident que les termes successifs vont en diminuant indéfiniment. D'ailleurs les termes sont alternativement positifs et négatifs. Donc l'erreur qu'on commet en s'arrêtant à un terme quelconque est plus petite que le terme suivant, et de signe contraire au dernier terme qu'on a pris.

On a trouvé

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

on peut déduire de là a^x. car

$$a^x = e^{xLa}.$$

Donc

$$a^x = 1 + \frac{xLa}{1} + \frac{(xLa)^2}{1.2} + \frac{(xLa)^3}{1.2.3} + \dots$$

Cherchons maintenant la formule du Binôme pour un exposant quelconque. Nous aurons

$$(x+h)^m = x^m(1+y)^m \quad \text{si} \quad \frac{h}{x} = y$$

Posons actuellement

$$(1+y)^m = \varphi(y)$$

et cherchons à développer $\varphi(y)$ d'après la formule de Mac-Laurin. Nous aurons

$$\varphi(y) = \varphi(0) + \frac{y}{1}\varphi'(0) + \dots + \frac{y^n}{1.2..n}\varphi^n(0) + \frac{y^{n+1}}{1.2..(n+1)}\varphi^{n+1}(\theta y)$$

ce qui revient à

$$(1+y)^m = \varphi(y) = 1 + \frac{m}{1}y + \frac{m(m-1)}{1.2}y^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}y^n + R$$

et, d'après la 1re forme du reste,

$$R = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{1.2\dots(n+1)} \cdot \frac{y^{n+1}}{(1+\theta y)^{n+1-m}}$$

Quelle est la condition pour que l'on soit en droit de prolonger indéfiniment la série des premiers termes de $(1+y)^m$? C'est d'abord que la série soit convergente, puis, que le terme R converge vers zéro quand n augmente

indéfiniment. Si y est <1, on sait que la série est convergente; sinon, elle est divergente. — Donc il faut déjà que y soit compris entre -1 et $+1$. Maintenant, cela ne suffit pas: il faut voir si alors R diminue indéfiniment.

Il y a deux cas à considérer.

1°. $y>0$. — alors R peut s'écrire

$$R = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)\,y^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} \times \frac{1}{(1+\theta y)^{n+1-m}}$$

Le premier facteur tend vers zéro. Car il revient à

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}\,y^p.\frac{(m-p)y}{p+1}.\frac{(m-p-1)y}{p+2}\ldots\ldots\frac{(m-n)y}{n+1}$$

Je suppose que p soit extrêmement grand, mais fixe. alors $\frac{(m-p)y}{p+1}$ est très-voisin de $-y$. Donc p pourra toujours être choisi assez grand pour que $\frac{(m-p)y}{p+1}$ soit $<k$, k étant <1. à fortiori les rapports suivants seront $<k$: donc le 1er facteur de R sera plus petit qu'un certain facteur constant multiplié par k^{n-p}, c.à.d. par une quantité qui a zéro pour limite.

Voyons maintenant pour le 2^d^. facteur. θ et y sont >0; donc $\theta y>0$. Donc $(1+\theta y)^{n+1-m}$ converge vers ∞, ou tout au plus vers 1 si θ convergeait vers zéro. Donc le 2^d^. facteur a pour limite zéro, q.q.f. 1: donc $\lim R=0$.

2°. $y<0$. — alors, le 1er facteur tendrait toujours vers zéro, mais le second augmenterait indéfiniment. La démonstration précédente tombe donc en défaut. ayons recours à la 3e. forme du reste. Nous avons

$$R = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)(1-\theta)^n}{1.2\ldots n}\cdot\frac{y^{n+1}}{(1+\theta y)^{n+1-m}}$$

Comme y est <0, changeons y en $-y$: nous avons, en valeur absolue,

$$R = \frac{m(m-1)\ldots(m-n).(1-\theta)^n}{1.2\ldots n}\cdot\frac{y^{n+1}}{(1-\theta y)^{n+1-m}}$$

Le facteur $\frac{m(m-1)\ldots(m-n)y^{n+1}}{1.2\ldots n}$ tend toujours vers zéro. Reste

Donc encore $\frac{(1-\theta)^n}{(1-\theta y)^{n+1-m}}$, ce qui peut s'écrire $\left(\frac{1-\theta}{1-\theta y}\right)^n (1-\theta y)^{m-1}$.

$\frac{1-\theta}{1-\theta y}$ est une fraction proprement dite. Donc sa puissance n a pour limite zéro, et dans tous les cas est <1. (remarque nécessaire, car cette fraction tend vers 1 si θ tend vers zéro); $(1-\theta y)^{m-1}$ est un facteur constant, ou du moins toujours fini. Donc enfin R converge vers zéro.

En Résumé, pour y compris entre -1 et $+1$, on a

$$(1+y)^m = 1 + \frac{m}{1} y + \frac{m(m-1)}{1.2} y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} y^3 + \cdots$$

on tire delà

$$(x+h)^m = x^m + m x^{m-1} h + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} h^2 + \cdots\cdots$$

pour $\frac{h}{x}$ compris entre -1 et $+1$, c.à.d. $\frac{h}{x} > -1$ et $\frac{h}{x} < 1$, donc $x+h > 0$ et $x > h$.

Soit par exemple à développer

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

Cela revient à $\quad (1-x)^{-\frac{1}{2}}$

Désignons pour un instant l'exposant par m. Nous aurons $\frac{m}{1} = -\frac{1}{2}$, $\frac{m-1}{2} = -\frac{3}{4}$, $\frac{m-2}{3} = -\frac{5}{6}$, $\frac{m-3}{4} = -\frac{7}{8}$, ...

Donc la formule de Maclaurin donnera

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n}x^n + \cdots\cdots$$

Cela est vrai pour $x<1$: car évidemment le reste irait en convergeant vers zéro. — Si $x=1$, on a $(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \infty$, il n'y a donc lieu à rien examiner. — On peut cependant voir qu'alors la série est en effet divergente. Car $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n-1}{2n}$: ce rapport tend vers 1 et est toujours <1 : c'est un cas douteux. Mais posons $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1+\alpha}$. On trouve $\alpha = \frac{1}{2n+1}$ d'où $n\alpha = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2-\frac{1}{n}}$. Donc ce produit n'est pas plus grand qu'une quantité K supérieure à 1. Donc la

série est divergente.

Soit à développer $\mathcal{L}(x+h)$. on a

$$\mathcal{L}(x+h) = \mathcal{L}.\, x\left(1+\frac{h}{x}\right) = \mathcal{L}.\, x(1+y) = \mathcal{L}x + \mathcal{L}(1+y)$$

Posons donc

$f(y) = \mathcal{L}(1+y)$ — $f(0) = 0$

$f'(y) = (1+y)^{-1}$ — $f'(0) = 1$

$f''(y) = -(1+y)^{-2}$ — $f''(0) = -1$

$f'''(y) = 1.2(1+y)^{-3}$ — d'où $f'''(0) = 1.2$

$f^{IV}(y) = -1.2.3(1+y)^{-4}$ — $f^{IV}(0) = -1.2.3$

... — ...

$f^{n}(y) = \pm 1.2..(n-1)(1+y)^{-n}$ — $f^{n}(0) = \pm 1.2..(n-1)$

Donc enfin

$$\mathcal{L}(1+y) = \frac{y}{1} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots \pm \frac{y^n}{n} \mp \frac{y^{n+1}}{(n+1)(1+\theta y)^{n+1}}$$

Quelle doit être la valeur de y pour que le 2e. membre puisse être réduit à la série? D'abord, la série doit être convergente, et pour cela, on sait que y doit être compris entre -1 et $+1$: il peut même être égal à 1, mais non à -1. — Cette première condition remplie, voyons si elle entraîne la conséquence que le reste diminue indéfiniment.

Supposons d'abord $y > 0$. Le reste est $\frac{1}{n+1} \times \left(\frac{y}{1+\theta y}\right)^{n+1}$; le 1er. facteur tend vers zéro, le 2e. aussi en général, s'il ne tend pas vers 1; donc Lim. $R = 0$, même pour $y = 1$.

Supposons $y < 0$. En adoptant la 3e. forme du reste, on aura

$$R = \frac{y^{n+1}}{1.2..n}(1-\theta)^n f^{n+1}(\theta x) = \frac{(1-\theta)^n y^{n+1}}{(1-\theta y)^{n+1}} = \left(\frac{1-\theta}{1-\theta y}\right)^n \times \frac{y}{1-\theta y}$$

et sous cette forme, on voit facilement que $\lim R = 0$, pour $y < 1$, mais non pour $y = 1$.

Donc enfin

$$(1)\quad \mathcal{L}(1+y) = \frac{y}{1} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \cdots \qquad y^2 < 1$$

et

$$(2)\quad \mathcal{L}(x+h) = \mathcal{L}x + \frac{h}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{x}\right)^3 - \cdots \qquad \frac{h^2}{x^2} < 1$$

Reprenons la Série (1). Comme elle est peu convergente, on la transforme habituellement.

(Voir pour ces transformations l'Introduction au Calcul différentiel de Lacroix).

Cherchons, d'après ce qui précède, à trouver la limite des erreurs qu'entraîne nécessairement l'emploi des Tables de Callet pour les Logarithmes. — Supposons qu'on calcule $\mathrm{Log}\, A$. Si $A = 3458,35$ par exemple, on sait qu'on cherche $\mathrm{Log}\, 3458$; puis on cherche la différence tabulaire $\Delta = \mathrm{Log}\, 3459 - \mathrm{Log}\, 3458$. appelons h la fraction $0,35$. alors on écrit

$$1 : h :: \Delta : x$$

d'où

$$x = h\Delta$$

De sorte qu'on multiplie la différence entre les nombres par la différence tabulaire. — Mais on sait que la proportion admise n'est pas vraie: seulement on voit en algèbre qu'elle approche de la vérité d'autant plus que les nombres sont plus grands et h plus petit. — Revenons sur cette assertion. — Soit x un nombre. on a

$$f(x+h) - f(x) = h f'(x+\theta h)$$

Donc

$$\mathrm{Log}(x+h) - \mathrm{Log}\, x = \frac{h\, \mathrm{Log}\, e}{x+\theta h}$$

Pour $h=1$, le 1er. membre est Δ, donc

$$\Delta = \frac{\mathrm{Log}\, e}{x+\theta'}$$

en appelant θ' ce que devient θ pour $h=1$. divisant membre à membre les deux dernières égalités, il vient

$$\frac{\mathrm{Log}(x+h) - \mathrm{Log}\, x}{\Delta} = h \cdot \frac{x+\theta'}{x+\theta h}$$

ceci montre donc bien que nous n'avons pas la proportion

$$\frac{\mathrm{Log}(x+h) - \mathrm{Log}\, x}{\Delta} = \frac{h}{1}$$

Pour avoir la limite de l'erreur commise, je cherche

$$\lim . \frac{x+\theta'}{x+\theta h}$$

or, si je fais $\theta' = 1$ et $\theta = 0$, j'aurai un résultat plus grand que $\frac{x+\theta'}{x+\theta h}$; — j'aurai un résultat plus petit en faisant $\theta' = 0$ et $\theta = 1$. donc

$$\frac{x+1}{x} > \frac{x+\theta'}{x+\theta h} > \frac{x}{x+1}$$

ou

$$1 + \frac{1}{x} > \frac{x+\theta'}{x+\theta h} > 1 - \frac{1}{x}$$

Donc on peut poser

$$\frac{x+\theta'}{x+\theta h} = 1 \pm \varepsilon$$

— Donc
$$\frac{\mathrm{Log}(x+h)-\mathrm{Log}\,x}{\Delta} = h \pm h\varepsilon$$
d'où
$$\mathrm{Log}(x+h)-\mathrm{Log}\,x = \Delta h \pm \Delta h \varepsilon$$
D'après la proportion admise, nous avions $\mathrm{Log}(x+h)-\mathrm{Log}\,x = \Delta h$: donc l'erreur est $\Delta h \varepsilon$. Or h est <1, ε est plus petit que $\frac{1}{x}$. Quant à Δ, sa valeur est $\frac{\mathrm{Log}\,e}{x+\theta'}$. Or $\mathrm{Log}\,e = 0,434294$.. Donc $\mathrm{Log}\,e < \frac{1}{2}$. D'ailleurs $x+\theta' > x$. Donc on a $\Delta < \frac{1}{2x}$. Donc enfin
$$\Delta h \varepsilon < \frac{1}{2x^2}$$
L'erreur est plus petite que la moitié de l'inverse du carré du nombre considéré. — Or, dans les tables de Callet, on s'arrange toujours de façon que l'on ait $x > 10^4$. Donc l'erreur est $< \frac{1}{2.10^8}$, ou plus petite que $\frac{1}{2}$ unité du huitième ordre décimal : donc les sept 1ères décimales, qu'on conserve seules, sont toujours exactes.

Au contraire quand, du logarithme, on remonte au nombre correspondant, c'est h qu'on cherche, et l'on tire de la proportion hypothétique
$$h = \frac{\mathrm{Log}(x+h)-\mathrm{Log}\,x}{\Delta}$$
tandis que l'égalité (A) donne
$$h = \frac{\mathrm{Log}(x+h)-\mathrm{Log}\,x}{\Delta} \pm h\varepsilon$$
Donc l'erreur est $h\varepsilon$. Donc cette erreur est plus petite que $\frac{1}{x}$, c.à.d. que $\frac{1}{10^4}$. Il semblerait d'après cela que l'on peut prendre 4 chiffres décimaux pour h : pourquoi donc en algèbre prescrit-on de ne jamais en prendre que 2 ? C'est que h s'obtient par une division dont les termes ne sont connus qu'approximativement, et que, dans une pareille opération, on ne peut jamais espérer qu'on aura au quotient plus de chiffres exacts qu'il n'y en a au diviseur : or ce diviseur est Δ, et les tables ne le donnent souvent qu'avec deux chiffres.

Soit à développer
$$f(x) = \mathrm{arc\,tg}\,x$$
Nous aurons
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$
$$f'''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x.4x(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$
Mais on n'aperçoit aucune loi dans la formation des dérivées successives, de sorte qu'on ne pourra former le terme général de la série.

L'introduction des quantités imaginaires dans le calcul est ici d'une très-grande utilité, et fait apercevoir la loi de formation des dérivées. — Posons

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(1-x\sqrt{-1})(1+x\sqrt{-1})} = \frac{A}{1-x\sqrt{-1}} + \frac{B}{1+x\sqrt{-1}}$$

on trouve facilement que $A = B = \frac{1}{2}$, de sorte qu'on peut écrire la dérivée

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left\{(1-x\sqrt{-1})^{-1} + (1+x\sqrt{-1})^{-1}\right\}$$

D'où

$$f''(x) = \frac{1\cdot\sqrt{-1}}{2}\left\{(1-x\sqrt{-1})^{-2} - (1+x\sqrt{-1})^{-2}\right\}$$

$$f'''(x) = \frac{1\cdot 2(\sqrt{-1})^2}{2}\left\{(1-x\sqrt{-1})^{-3} + (1+x\sqrt{-1})^{-3}\right\}$$

La loi est évidente, et l'on peut écrire

$$f^n(x) = \frac{1.2..(n-1)}{2}(\sqrt{-1})^{n-1}\left\{(1-x\sqrt{-1})^{-n} - (-1)^n(1+x\sqrt{-1})^{-n}\right\}$$

Donc

$$f^n(0) = \frac{1.2..(n-1)}{2}(\sqrt{-1})^{n-1}\left\{1 - (-1)^n\right\}$$

Si n est pair, $f^n(0)$ est nul; si n est impair, la quantité entre crochets devient 2, et il vient

$$f^n(0) = 1.2...(n-1)\,(\sqrt{-1})^{n-1}$$
$$= 1.2..(n-1)\,(-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

Donc

$$f^n(0) = \mp 1.2.3..(n-1)$$

suivant que $n-1$ sera simplement ou doublement pair. — Si donc nous supposons n pair, nous aurons

$$\text{arc tg } x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \pm \frac{x^{n-1}}{n-1} \mp R$$

et en général on a

$$R = \frac{x^n}{1.2..n} f^n(\theta x)$$

Donc ici

$$R = \frac{x^n(\sqrt{-1})^{n-1}}{2n}\left\{(1-\theta x\sqrt{-1})^{-n} - (1+\theta x\sqrt{-1})^{-n}\right\}$$

car $(-1)^n = 1$, n étant pair; — ou bien

$$R = \frac{x^n(-1)^{\frac{n}{2}}}{2n\sqrt{-1}}\left\{(1-\theta x\sqrt{-1})^{-n} - (1+\theta x\sqrt{-1})^{n}\right\}$$

$$= \pm\frac{x^n}{2n\sqrt{-1}}\left\{(1-\theta x\sqrt{-1})^{-n} - (1+\theta x\sqrt{-1})^{-n}\right\}$$

Il s'agit maintenant de faire disparaître les imaginaires. Or on peut écrire ainsi le reste, en valeur absolue,

$$R = \frac{1}{2n\sqrt{-1}}\left\{\left(\frac{x}{1-\theta x\sqrt{-1}}\right)^n - \left(\frac{x}{1+\theta x\sqrt{-1}}\right)^n\right\}$$

Je pose

$$\frac{x}{1-\theta x\sqrt{-1}} = \frac{x(1+\theta x\sqrt{-1})}{1+\theta^2x^2} = \frac{x}{1+\theta^2x^2} + \frac{\theta^2x^2}{1+\theta^2x^2}\sqrt{-1} = \rho\left\{\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\right\}$$

et

$$\rho = \sqrt{\frac{x^2+\theta^2x^4}{(1+\theta^2x^2)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+\theta^2x^2}}$$

Maintenant, il est clair que j'aurai

$$\frac{x}{1+\theta x\sqrt{-1}} = \rho\left\{\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\right\}$$

De sorte que

$$R = \frac{\rho^n}{2n\sqrt{-1}}\left(\cos n\varphi + \sqrt{-1}\sin n\varphi - \cos n\varphi + \sqrt{-1}\sin n\varphi\right)$$

$$R = \frac{\rho^n}{n}\sin.n\varphi = \left(\frac{x}{\sqrt{1+\theta^2x^2}}\right)^n\frac{\sin n\varphi}{n}$$

Il n'y a donc plus d'imaginaires, et nous pouvons discuter. — D'abord, si nous considérons la série en elle-même, nous voyons que, pour qu'elle soit convergente, x doit être compris entre -1 et $+1$. — Cette condition remplie, si nous examinons le reste, nous voyons que $\frac{x}{\sqrt{1+\theta^2x^2}}$ est une fraction dont la puissance n a zéro pour limite, ou au moins est toujours inférieure à 1, car il peut se faire que x tende vers 1 et θ vers 0; mais d'ailleurs, $\frac{\sin.n\varphi}{n}$ tend toujours vers zéro: donc, même pour $x = \pm 1$, R diminue indéfiniment. Donc

$$\text{arc tg}\,x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad x^2 \overline{\gtrless} 1$$

Si $x = 1$, on a

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

série peu convergente, mais qu'on sait transformer.

Remarques sur les Séries de Taylor et Maclaurin.

Quelquefois, pour $x = a$, une dérivée de la fonction devient infinie. Si $f^n(a) = \infty$, alors on dit que la série de Taylor est infinie à partir de cette dérivée inclusivement.

Supposons

$$f(x) = \varphi(x) + (x-a)^{\frac{5}{3}} \psi(x)$$

J'aurai

$$f(a+h) = \varphi(a+h) + h^{\frac{5}{3}} \psi(a+h) \qquad \text{quantité finie.}$$

or je forme les deux premières dérivées :

$$f'(x) = \varphi'(x) + \frac{5}{3}(x-a)^{\frac{2}{3}}\psi(x) + (x-a)^{\frac{5}{3}}\psi'(x)$$

quantité finie pour $x = a$.

$$f''(x) = \varphi''(x) + \frac{10}{9}(x-a)^{-\frac{1}{3}}\psi(x) + \text{etc.}$$

quantité infinie pour $x = a$. — Donc, si nous voulons appliquer la série de Taylor, tout ce que nous aurons le droit d'écrire, c'est

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + h \left\{ f'(a+\theta h) - f'(a) \right\}$$

Théorème.

1°. La série de Maclaurin fournit le seul développement possible d'une fonction suivant les puissances entières ascendantes de la variable.

2°. La série de Taylor fournit le seul développement possible d'une fonction suivant les puissances entières ascendantes de l'accroissement de la variable.

Démontrons-le d'abord pour la série de Maclaurin. — Supposons qu'on donne

$$(1) \quad f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$$

Je dis que

$$A = f(0)$$
$$B = f'(0)$$
$$C = \frac{1}{1.2} f''(0)$$
$$D = \frac{1}{1.2.3} f'''(0)$$
$$\cdots$$

Pour le prouver, on dit souvent : Développons $f(x)$ d'après la Série de Maclaurin : nous aurons

$$(2) \quad f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \cdots$$

Retranchant membre à membre les égalités (1) et (2), il vient.

$$0 = A - f(0) + \left(B - f'(0)\right) x + \left(C - \frac{f''(0)}{1.2}\right) x^2 + \cdots$$

Cela est vrai quel que soit x ; donc

$$A = f(0)$$
$$B = f'(0)$$
$$C = \frac{1}{1.2} f''(0)$$
$$\cdots$$

Ce raisonnement est bien exact : cependant, on pourrait objecter que, pour le faire, on admet plus que l'hypothèse : car l'hypothèse donne simplement le développement (1), mais rien ne dit que $f(x)$ soit effectivement développable d'après la Série de Maclaurin. Pour répondre à cette difficulté, il faudrait être autorisé à différentier une Série. Or il n'est pas évident que si je différentie la Série $A + Bx + Cx^2 + \cdots$ la Série des dérivées représentera $f'(x)$; car on sait que, une série étant convergente, la Série des dérivées peut

fort bien être divergente. — Ici cependant, si l'on différentie le 2e. membre de l'Egalité (1), on a une nouvelle série

$$B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots$$

que l'on sait être convergente pour toutes les valeurs de x plus petites que celles pour lesquelles la première était elle-même convergente. — admettons comme démontré ce fait presque évident que, si la seconde série est convergente, elle a pour somme $f'(x)$. alors

$$f'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots \qquad x < \text{que dans } f(x)$$

Si je fais $x = 0$, il vient

$$B = f'(0).$$

En différentiant encore

$$\frac{1}{1.2} f''(x) = C + 3Dx + \ldots$$

et, faisant $x = 0$

$$C = \frac{1}{1.2} f''(0)$$

et ainsi de suite. — d'ailleurs si, dans (1), je fais $x = 0$, j'aurai

$$A = f(0)$$

Donc le Théorème est démontré.

Mêmes Raisonnements pour la Série de Taylor.

Des Symboles Imaginaires.

On sait que toute expression imaginaire

$$a+b\sqrt{-1}$$

peut se mettre sous la forme

$$\rho\left(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi\right)$$

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2} \qquad \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$$

On sait aussi que

$$(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)(\cos\varphi'+\sqrt{-1}\sin\varphi')=\cos(\varphi+\varphi')+\sqrt{-1}\sin(\varphi+\varphi')$$

Enfin on connait la formule de Moivre

$$(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^m=\cos m\varphi+\sqrt{-1}\sin m\varphi$$

démontrée vraie même pour le cas où $m=\frac{p}{q}$, où $m=-m'$. Seulement, si $m=\frac{p}{q}$, le 2e membre est simplement égal à l'une des q déterminations du 1er, de sorte qu'alors, pour avoir une égalité absolue, on écrit

$$(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^{\frac{p}{q}}=\left(\cos\frac{p}{q}\varphi+\sqrt{-1}\sin\frac{p}{q}\varphi\right)\left(\cos\frac{2k\varpi}{q}+\sqrt{-1}\sin\frac{2k\varpi}{q}\right)$$

$$=\cos\frac{p\varphi+2k\pi}{q}+\sqrt{-1}\sin\frac{p\varphi+2k\varpi}{q}$$

Ces préliminaires rappelés, reprenons la formule

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\cdots$$

Comme la série ne contient que des termes positifs, je puis intervertir l'ordre des termes, et écrire :

$$e^x = \left(1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots\right) + \left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \dots\right)$$

Si maintenant je change x en $x\sqrt{-1}$, on voit que le 2e. membre devient $\cos x + \sqrt{-1}\sin x$. Si donc je conviens de représenter par $e^{x\sqrt{-1}}$ ce que devient alors le 1er. membre, j'aurai

$$(1) \qquad e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$$

ainsi : Par définition, $e^{x\sqrt{-1}}$ représente la valeur que prend e^x par le changement de x en $x\sqrt{-1}$, et par démonstration, cette valeur est $\cos x + \sqrt{-1}\sin x$.

Si je change x en $-x$, j'aurai

$$(2) \qquad e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x$$

Les égalités (1) et (2) donnent

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

Pour qu'il y ait une certaine utilité à introduire les exponentielles imaginaires dans le calcul, il faut que les règles établies pour les autres quantités subsistent encore pour celles-ci. — Or il est facile de voir qu'il en est ainsi.

Multiplication. — On a

$$e^{x\sqrt{-1}} \times e^{y\sqrt{-1}} = (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y) = \cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y)$$

$$e^{x\sqrt{-1}} \times e^{y\sqrt{-1}} = e^{(x+y)\sqrt{-1}}$$

c. q. f. d.

Division. — Découle de la démonstration précédente.

De même pour les Puissances et les Racines.

Ainsi, toutes les Règles du Calcul ordinaire s'appliquent à ces quantités.

On emploie quelquefois encore le Symbole suivant, qui est plus général :

$$e^{x+y\sqrt{-1}}$$

et que nous définirons encore : C'est ce que devient e^x quand on y remplace x par $x+y\sqrt{-1}$. — Il est facile de démontrer que cette valeur n'est autre chose que $e^x \times e^{y\sqrt{-1}}$. En effet

$$e^{x+y} = e^x . e^y$$

ou

$$1 + \frac{x+y}{1} + \frac{(x+y)^2}{1.2} + \dots = \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \dots\right)\left(1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \dots\right)$$

Cela est une identité en x et en y. Donc je puis remplacer y par $y\sqrt{-1}$, et j'aurai directement

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x . e^{y\sqrt{-1}}$$

cqfd.

Il est évident que les Règles du Calcul Différentiel s'appliquent également à ces Quantités puisque ces règles reposent elles-mêmes uniquement sur celles du Calcul algébrique. — Cependant, démontrons-le une fois directement. Soit à prendre

$$\frac{d}{dx} . e^{u+v\sqrt{-1}} \qquad u = \varphi(x) \quad v = \psi(x)$$

on a

$$e^{u+v\sqrt{-1}} = e^u \left(\cos v + \sqrt{-1} \sin v\right) = e^u \cos v + e^u \sqrt{-1} \sin v$$

Donc

$$\frac{d}{dx} . e^{u+v\sqrt{-1}} = e^u \cos v \frac{du}{dx} - e^u \sin v \frac{dv}{dx} + e^u \sqrt{-1} \sin v \frac{du}{dx} + e^u \sqrt{-1} \cos v \frac{dv}{dx}$$

$$= e^u \left(\cos v + \sqrt{-1} \sin v\right)\left(\frac{du}{dx} + \sqrt{-1} \frac{dv}{dx}\right)$$

$$= e^{u+v\sqrt{-1}} \left(\frac{du}{dx} + \sqrt{-1} \frac{dv}{dx}\right)$$

cqfd.

Cherchons le Logarithme d'une expression Imaginaire de la forme $a+b\sqrt{-1}$

c. à d. cherchons s'il est possible de satisfaire à l'Egalité

$$L(a+b\sqrt{-1}) = x+y\sqrt{-1}$$

Ceci revient à

$$a+b\sqrt{-1} = e^{x+y\sqrt{-1}} = e^{x}\left(\cos y+\sqrt{-1}\sin y\right)$$

ce qu'on peut écrire aussi

$$\rho\left(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi\right) = e^{x}\left(\cos y+\sqrt{-1}\sin y\right)$$

on tire de là

$$e^{x} = \rho$$

d'où

$$x = L\rho$$

et ensuite

$$\begin{cases} \cos\varphi = \cos y \\ \sin\varphi = \sin y \end{cases}$$

d'où

$$y = \varphi + 2k\pi$$

Donc enfin

$$L(a+b\sqrt{-1}) = L\rho + (2k\pi+\varphi)\sqrt{-1}$$

Si $b=0$, il y a deux cas à distinguer, suivant que a est positif ou négatif: mais toujours on a

$\varphi = \text{arc}\,\text{tg}\,\frac{b}{a} = \text{arc}\,\text{tg}\,0 = 0+n\pi$.

1°. $a>0$. – alors $\text{tg}\,\frac{b}{a} = +0$: donc $\varphi=0$.

$$(La) = La + 2k\pi\sqrt{-1}$$

on voit donc qu'une quantité réelle et positive a une infinité de Logarithmes, dont un seul réel.

2°. $a<0$. alors, changeant a en $-a$, et observant que $\text{tg}\,\frac{b}{a} = -0$, d'où $\varphi=\pi$, on a

$$\left(\mathcal{L}(-a)\right) = \mathcal{L}a + (2k+1)\pi\sqrt{-1}$$

Donc une quantité négative a aussi une Infinité de Logarithmes, tous Imaginaires.

Si, dans cette dernière Égalité, on fait $a = 1$, on a

$$\left(\mathcal{L}(-1)\right) = (2k+1)\pi\sqrt{-1}$$

et, si $k=0$,

$$\mathcal{L}(-1) = \pi\sqrt{-1}$$

d'où

$$\pi = \frac{\mathcal{L}(-1)}{\sqrt{-1}}$$

Les Quantités Imaginaires donnent facilement $\cos mx$ et $\sin mx$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$.

En effet, on a

$$\left(\cos x + \sqrt{-1}\sin x\right)^m = \cos mx + \sqrt{-1}\sin mx$$

Si l'on développe le 1er membre d'après le Binôme de Newton, ce développement pourra être identifié à $\cos mx + \sqrt{-1}\sin mx$, et l'on voit que l'on trouvera ainsi

$$\cos mx = \cos^m x - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}x\sin^2 x + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}x\sin^4 x - \dots$$

$$\sin mx = m\cos^{m-1}x\sin x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}x\sin^3 x + \frac{m(m-1)\dots(m-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{m-5}x\sin^5 x + \dots$$

On peut également trouver les formules Inverses. — On a vu en effet que, si l'on pose

$$\left.\begin{array}{l} e^{x\sqrt{-1}} = u \\ e^{-x\sqrt{-1}} = v \end{array}\right\} \text{ on a } \left\{\begin{array}{l} 2\cos x = u+v \\ 2\sqrt{-1}\sin x = u-v \end{array}\right.$$

d'où

$$uv = 1 \qquad u^k + v^k = 2\cos kx \qquad u^k - v^k = 2\sqrt{-1}\sin kx$$

Cela posé, prenons
$$2\cos x = u + v$$
et élevons les deux membres à la puissance m : il vient
$$2^m \cos^m x = u^m + m u^{m-1} v + \frac{m(m-1)}{1.2} u^{m-2} v^2 + \cdots + m v^{m-1} u + v^m$$
ou
$$2^m \cos^m x = (u^m + v^m) + m u v\left(u^{m-2} + v^{m-2}\right) + \frac{m(m-1)}{1.2} u^2 v^2 \left(u^{m-4} + v^{m-4}\right) + \cdots + \begin{cases} \dfrac{m(m-1)\cdots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\cdots\frac{m}{2}} u^{\frac{m}{2}} v^{\frac{m}{2}} \\[2ex] \dfrac{m(m-1)\cdots\left(m-\frac{m-1}{2}\right)}{1.2\cdots\frac{m+1}{2}} u^{\frac{m-1}{2}} v^{\frac{m-1}{2}} (u+v) \end{cases}$$
suivant que m est pair ou impair. — Mais cela se réduit évidemment de la manière suivante :
$$2^m \cos^m x = 2\cos mx + 2m\cos(m-2)x + 2\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \cdots + \begin{cases} \dfrac{m(m-1)\cdots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\cdots\frac{m}{2}} & m \text{ pair} \\[2ex] 2.\dfrac{m(m-1)\cdots\left(\frac{m+1}{2}\right)}{1.2\cdots\frac{m+1}{2}} \cos x & m \text{ impair} \end{cases}$$
ou enfin
$$2^{m-1} \cos^m x = \cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \cdots + \begin{cases} \dfrac{m(m-1)\cdots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{2\times 1.2\cdots\frac{m}{2}} & m \text{ pair.} \\[2ex] \dfrac{m(m-1)\cdots\left(\frac{m+1}{2}\right)}{1.2\cdots\frac{m+1}{2}} \cos x & m \text{ impair.} \end{cases}$$

Et il est évident qu'on trouverait de même les formules analogues pour le sinus.

Maxima et Minima.

Soit la fonction
$$y = f(x)$$
Je suppose que x croisse d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$. Si, dans ce cours des valeurs d'x, on trouve une valeur $x = a$ telle que la valeur Y correspondante de la fonction y soit plus grande — ou plus petite — que toutes les valeurs environnantes de cette même fonction, on dit que la valeur Y est un Maximum — ou un Minimum.

Cette définition laisse entendre qu'une même fonction peut avoir un certain nombre de Maxima et de Minima.

L'analyse donne sur-le-champ un moyen de chercher les Maxima et les Minima. — Quand $f(x)$ est croissant, sa dérivée est positive: elle est négative si $f(x)$ décroît, et réciproquement. Si donc y passe par une valeur Maxima ou minima, sa dérivée devra passer du positif au négatif, ou inversement, et par conséquent devra s'annuler ou passer par l'infini pour la valeur de x correspondante. — Donc, réciproquement, si l'on cherche toutes les valeurs de x qui peuvent rendre $\frac{dy}{dx}$ nul ou infini, on aura toutes les valeurs auxquelles peuvent correspondre des maxima ou des minima de la fonction: et si de plus on s'assure que, en passant par ces valeurs, la fonction, positive auparavant, devient négative, on sera sûr qu'il y a Maximum; — Minimum au contraire si c'est l'inverse qui se produit: et il n'y aura ni maximum ni minimum si le passage par 0 ou ∞ n'amène aucun changement de signe dans la fonction dérivée.



La plupart du temps, ces changements de signe peuvent s'apercevoir sur la fonction dérivée elle-même. Soit

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1}$$

on trouve aisément

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(x-2)}{(x^2+x-1)^2}$$

Le dénominateur, étant un carré, ne peut changer de signe. D'ailleurs, les valeurs qui le rendent nul, et qui par conséquent rendent $\frac{dy}{dx}$ infini, ne font pas changer de signe le numérat^r. Donc il est inutile de chercher des maxima ou des minima parmi ces valeurs. — Posons seulement

$$x(x-2) = 0$$

soit

$$x = 0$$
$$x = 2$$

L'inspection du numérateur montre que $\frac{dy}{dx}$ passe du positif au négatif quand x, croissant, atteint et dépasse zéro ; — du négatif au positif quand x passe par 2 : donc $x=0$ est une valeur à laquelle correspond un maximum de y, et $x=2$ une valeur à laquelle répond un minimum. — Si l'on construisait la courbe, on saurait que $f(0)$, ou -1, est une ordonnée maximum pour l'abscisse 0, et que, pour l'abscisse 2, on a une ordonnée minima, $f(2)$ ou $\frac{3}{5}$: ce sont là de précieux documents dans la construction des courbes.

Considérons seulement, parmi les valeurs d'x qui peuvent donner un maximum ou un minimum, celles qui ont été obtenues en égalant à zéro la 1re dérivée, et montrons comment la discussion de ces valeurs est facilitée par l'emploi des dérivées d'ordres supérieurs.

Supposons que, pour $x = a$, y prenne une valeur

maximum, b. alors, $\frac{dy}{dx}$ aura passé par zéro du positif au négatif. Donc, on voit que

$$\text{pour} \quad \left.\begin{array}{l} x = a-h \\ x = a \\ x = a+h \end{array}\right\} \quad \text{on a} \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} > 0 \\ \frac{dy}{dx} = 0 \\ \frac{dy}{dx} < 0 \end{array}\right.$$

Donc $\frac{dy}{dx}$ est une fonction décroissante aux environs de $x = a$. Donc, on devra avoir $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ pour $x = a$. Réciproquement, si l'on a $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, $\frac{dy}{dx}$ étant nul, y passe par un maximum. Car alors $\frac{dy}{dx}$ est une fonction décroissante: comme elle est nulle pour $x = a$, elle sera positive pour $x = a-h$ et négative pour $x = a+h$: donc $\frac{dy}{dx}$ passe du positif au négatif en passant par zéro ; donc $y = b$ est un maximum.

On verra absolument de même que si, pour $x = a$, y prend une valeur minima b, $\frac{d^2y}{dx^2}$ doit être positif, et réciproquement.

Donc

$$x = a \,,\ \frac{dy}{dx} = 0 \,,\ \left\{\begin{array}{l} \frac{d^2y}{dx^2} < 0 \ \ldots \ \text{Maximum} \\ \frac{d^2y}{dx^2} > 0 \ \ldots \ \text{Minimum} \end{array}\right.$$

et réciproquement.

Mais maintenant, il pourrait se faire que $\frac{d^2y}{dx^2}$ fût nul. alors, le signe deviendrait incertain. alors il faudra considérer que, pour le Maximum, le signe de $\frac{d^2y}{dx^2}$ devra être — aux environs de $x = a$, c.à.d. pour $x = a-h$ et $x = a+h$. Mais, $\frac{d^2y}{dx^2}$ est alors maximum pour $x = a$: donc on doit avoir $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ et $\frac{d^4y}{dx^4} < 0$. — En raisonnant de même, on verrait qu'en général :

Pour qu'une fonction soit Maximum – ou Minimum il faut et il suffit que la première dérivée qui ne s'annule pas soit d'ordre pair, et Négative, – ou Positive.

Soit maintenant

$$f(x, y) = 0$$

une Equation : comment trouvera-t-on les maxima et minima de la fonction ? Il suffit de remarquer que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{df}{dy}\right)}$$

et l'on raisonnera comme précédemment.

Voir p. 399.

Formes singulières des fonctions.

Soit

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$$

une fonction qui devient $\frac{0}{0}$ pour $x = a$. — on a

$$\varphi(x)\,F(x) = f(x)$$

D'où

$$\varphi'(x)\,F(x) + \varphi(x)\,F'(x) = f'(x)$$

Si je fais $x = a$, $F(x)$ s'annule : donc

$$\varphi(a)\,F'(a) = f'(a)$$

D'où

$$\varphi(a) = \frac{f'(a)}{F'(a)}$$

Si $f'(a)$ et $F'(a)$ devient nuls, on recommencerait.

Donc

La vraie valeur, pour $x = a$, d'une fraction qui devient $\frac{0}{0}$, est le rapport des deux premières dérivées de même ordre qui ne s'annulent pas simultanément.

Ex. $\dfrac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{x^2 - a^2}$ $\quad x = a$

$\dfrac{a^x - b^x}{x}$ $\quad x = 0$

$\dfrac{x^x - x}{1 - x + lx}$ $\quad x = 1$

Soit maintenant

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{pour } x = a.$$

on a

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$$

et cette fraction devient $\frac{0}{0}$ pour $x = a$. on rentre donc dans le cas précédent.

Soit
$$f(x).F(x) = 0 \times \infty \quad \text{pour } x=a.$$
on a
$$f(x).F(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}}$$
qui devient $\frac{0}{0}$ pour $x=a$

---

on considère aussi quelquefois des expressions qui deviennent
$$0^0 \qquad 1^\infty \qquad \infty^0$$
Elles proviennent de la fonction
$$y = (F(x))^{f(x)}$$
pour $x=a$. — Si l'on prend les Logarithmes Népériens, on aura
$$\mathcal{L}y = f(x).\mathcal{L}F(x)$$
alors le 2. membre deviendra $0 \times (-\infty)$, $\infty \times 0$ ou $0 \times \infty$; Donc on est ramené à l'un des cas précédents. — ayant $\mathcal{L}y$, on en déduit y.

Ex. Soit $\varphi(x) = (1-x)\,\mathrm{Tg}\,\frac{1}{2}\pi x$, $x=1$

on a $\varphi(1) = 0.\infty$.

Prenons
$$\varphi(x) = \frac{1-x}{(\mathrm{Tg}\,\frac{1}{2}\pi x)^{-1}}$$
Le rapport des dérivées est
$$\frac{-1}{-(\mathrm{Tg}\,\frac{1}{2}\pi x)^{-2} \times \frac{\frac{1}{2}\pi x}{\cos^2\frac{1}{2}\pi x}}$$
Pour $x=1$ on trouve $\frac{1}{0.\infty}$. Mais on peut écrire
$$\frac{2\,\mathrm{Tg}^2\frac{1}{2}\pi x \cos^2\frac{1}{2}\pi x}{\pi}$$
ou
$$\frac{2\,\mathrm{Sin}^2\frac{1}{2}\pi x}{\pi}$$
ce qui devient $\frac{2}{\pi}$ pour $x=1$.

Voir les Compléments. p. 206. —

Voici quelques Exemples faciles.

1°. Pour $x=0$
$$\frac{a^x - b^x}{x} = \mathrm{Log}\,\frac{a}{b}, \qquad \frac{\mathrm{Log}\,\frac{1}{x}}{\cot x} = 0,$$
$$\frac{x - \mathrm{Sin}\,x}{x^3} = \frac{1}{6}, \qquad \frac{\mathrm{Sin}^3 x}{x - \frac{3}{2}\mathrm{Sin}\,2x} = \frac{3}{2}$$

2°. Pour $x=1$
$$\frac{\mathrm{Log}\,x}{x-1} = 1, \qquad \frac{x-1}{x^n-1} = \frac{1}{n}, \qquad \frac{x^{\frac{3}{2}} - 1 + (x-1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}} - x + 1} = -\frac{3}{2}$$

---

applications Géométriques.

Des Tangentes.

Voir les Compléments p. 210.

Nous ne reviendrons pas ici sur ce que le cours de Mathématiques Spéciales a appris relativement aux Tangentes. on sait seulement qu'une Tangente se détermine par son Equation, et que, Y et X étant les coordonnées courantes de cette Tangente, x et y celles du point où elle touche la courbe, son Equation est

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x) = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}(X - x)$$

ce qui revient à

$$Y\frac{df}{dy} + X\frac{df}{dx} = y\frac{df}{dy} + x\frac{df}{dx}$$

Si au contraire la Tangente est menée par un point α, β extérieur, on sait que le lieu qui passe par tous les points de contact est donné par cette même Equation

$$\beta\frac{df}{dy} + \alpha\frac{df}{dx} = y\frac{df}{dy} + x\frac{df}{dx}$$

et l'on sait que le 2. membre s'abaisse au degré $m-1$.

Je rappellerai aussi les valeurs trouvées pour la Sous-tangente et la Tangente, pour la Sous-Normale et la Normale :

$$S_n = y\frac{dy}{dx}$$

$$N = y\sqrt{\frac{dy^2}{dx^2}+1}$$

$$S_t = y\frac{dx}{dy}$$

$$T = y\sqrt{\frac{dx^2}{dy^2}+1}$$

Quant aux Tangentes en coordonnées Polaires, on a vu de même que la tangente en un point (r, θ) d'une courbe se détermine par l'angle V qu'elle fait avec le rayon vecteur en ce point, et qu'on a

$$\operatorname{Tg} V = r \operatorname{Lim} \frac{h}{k}$$

h étant l'accroissement de l'angle, et k celui du rayon vecteur. — Ce résultat revient à

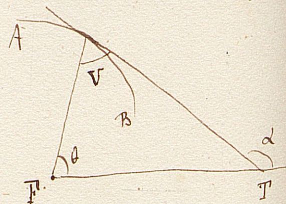
$$\operatorname{Tg} V = r\frac{d\theta}{dr}$$

Observons ici qu'on peut démontrer très simplement cette formule à l'aide du calcul différentiel. — Si j'appelle α l'angle que fait la tangente avec la partie positive de la ligne fixe, j'aurai

$$V = \alpha - \theta$$

Donc

$$\operatorname{Tg} V = \frac{\operatorname{Tg}\alpha - \operatorname{Tg}\theta}{1+\operatorname{Tg}\alpha \operatorname{Tg}\theta}$$



Si maintenant nous supposons pour un instant que la courbe soit rapportée à des axes rectangulaires se croisant en F, x et y étant les coordonnées de M, nous aurons

$$\operatorname{Tg}\alpha = \frac{dy}{dx} \qquad \operatorname{Tg}\theta = \frac{y}{x}$$

Donc

$$\operatorname{tg} V = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx}} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x\,dx + y\,dy}$$

or on a

$$x = r \cos\theta$$
$$y = r \sin\theta$$

D'où

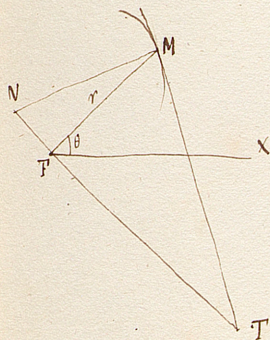
$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta$$

Différentiant

$$x\,dx + y\,dy = r\,dr$$
$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 \cos^2\theta} = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$
$$x\,dy - y\,dx = r^2\,d\theta$$

Donc

$$\operatorname{tg} V = r\,\frac{d\theta}{dr}$$ c.q.f.d.



Maintenant, si MN est la Normale, et si NT'T est perp. sur T'M, T'T et T'N sont ce qu'on appelle la Sous-tangente et la Sous-normale en coordonnées polaires. Il est visible qu'on a

$$S_t = r^2\,\frac{d\theta}{dr}$$
$$S_n = \frac{dr}{d\theta}$$

Pour application, on verrait facilement que la Sous-Normale est constante dans la Spirale d'Archimède $r = a\theta$, ainsi que la Sous-tangente dans la Spirale hyperbolique $r\theta = a$.

Voir les compléments p. 414.

Voir auparavant le chap. Concavité et convexité des courbes, p. 217.

Points Singuliers.

On appelle Points Singuliers tous ceux où une courbe présente quelque circonstance remarquable qui ne dépend pas de la position des axes.

Ainsi les points Maxima et Minima ne sont pas des points singuliers, parce qu'ils changent généralement avec la position des axes.

Points Multiples.

Les points Multiples sont ceux par lesquels passent plusieurs branches de courbe qui ne s'y arrêtent pas en général.

On peut distinguer les points doubles, triples ... suivant qu'il y passe deux, trois.. branches de courbe. – S'il n'en passe que deux, elles ne doivent pas s'y arrêter pour que ce soit un point multiple.

Soit

$$(1) \quad f(x,y)=0$$

l'Éq. rationnelle et entière d'une courbe algébrique. Comment trouvera-t-on ses points multiples, si elle en a ?

D'abord, si l'Éq. est résolue, et de la forme $y=\varphi(x)$, s'il existe des points multiples, il devra en général y avoir plusieurs valeurs de y pour une même valeur d'x. Pour le point multiple, ces valeurs deviennent égales, sans que cependant les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ soient pour cela réduites à un plus petit nombre que d'ordinaire : car toutes les branches passant au point multiple doivent avoir des tangentes différentes en ce point. – Mais, pour plus

de Généralité, revenons à l'Eq. (1) non résolue. — Soit (α, β) un point multiple. $\frac{dy}{dx}$ (pour $x=\alpha$, $y=\beta$) doit avoir plusieurs valeurs. or, en Général, $\frac{dy}{dx}$ est donné par l'Equation

$$(2) \qquad \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = 0.$$

or, cette Eq. est du 1er. degré, et ne peut donc pas donner plusieurs valeurs pour $\frac{dy}{dx}$. donc elle doit être vérifiée d'elle-même, et l'on doit avoir

$$(3) \qquad \frac{df}{dx} = 0$$

$$(4) \qquad \frac{df}{dy} = 0$$

Ces Eq. (3) et (4), ainsi que l'Eq. (1), doivent coexister entre α et β. Donc, en Général, il n'y a pas de points multiples dans une courbe donnée. — Maintenant, quand on aura trouvé un couple de valeurs satisfaisant à ces 3 Equations, il faudra reconnaître si, en ce point, il y aura effectivement plusieurs tangentes, et quelles elles sont. — Pour cela, on revient à l'Eq. (2) écrite ainsi

$$M + N\frac{dy}{dx} = 0$$

et on la différentie ;

$$(5) \qquad \frac{dM}{dx} + \frac{dM}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dN}{dx}\frac{dy}{dx} + \frac{dN}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + N\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

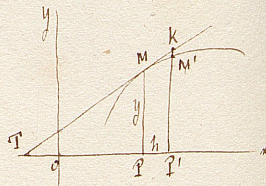
Le dernier terme est barré, puisque $N=0$. Cette Eq. est du 2d. degré, et elle donne deux valeurs pour $\frac{dy}{dx}$, à moins toutefois que cette Eq. ne soit elle-même identique. alors, le point multiple serait au moins triple, et l'on différentierait encore. — Si l'Eq. (5) avait ses deux racines égales, les deux tangentes seraient confondues au point multiple. — Dans ce dernier cas, la méthode semble n'être pas rigoureuse, puisque le raisonnement

s'appuie sur ce que les Tangentes doivent être différentes. Mais cette tangente commune représente véritablement deux droites superposées, qui par conséquent on conçoit devoir être données par deux droites superposées une Eq. du 2^d. degré ayant ses racines égales : cela fait comprendre pourquoi le raisonnement subsiste encore. D'ailleurs, on peut s'imaginer qu'on altère infiniment peu les coefficients de l'Eq. (1) de manière que les deux Tangentes deviennent distinctes : alors, le raisonnement subsiste. Si maintenant les coefficients altérés tendent de nouveau vers leurs valeurs primitives, l'Eq. du 2^d. degré ne cessera pas de donner les deux Tangentes : il en devra donc être encore de même à la limite.

Points d'Inflexion.

Théorème. – Lorsqu'une courbe est concave vers l'axe des x, y et $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont de signes contraires.

Je remarque d'abord que, dans ce cas, l'ordonnée P'M' de la courbe est toujours plus petite en valeur absolue que l'ordonnée P'K de la tangente en un point M $(x\,y)$ infiniment voisin. Donc KM' doit toujours être >0, si l'on prend KM' $=$ P'K $-$ P'M'. Or



$$P'K = y + h\frac{dy}{dx}$$

$$P'M' = y + h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(x+\theta h)}$$

$$-(P'K - P'M') = -KM' = \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(x+\theta h)}$$

Si h décroît indéfiniment, on voit donc bien que $\frac{d^2y}{dx^2}$ doit être <0 : et ici $y>0$. – Si $y<0$, on voit de même qu'elle on a $\frac{d^2y}{dx^2}>0$: donc .... cqfd.

Théorème. — Lorsqu'une courbe est convexe vers l'axe des x, y et $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont de mêmes signes.

Même démonstration.

Théorème. — Réciproquement, lorsque y et $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont de signes contraires — ou de même signe — la courbe est concave — ou convexe vers l'axe des x.

Cela posé :

on admet qu'en un point m la courbe, d'abord concave vers l'axe des x, devient convexe, ou inversement. alors, au point m, il y a inflexion, et ce qui caractérise la tangente en ce point, c'est qu'elle traverse la courbe. Donc, en ce point, $\frac{d^2y}{dx^2}$, d'abord négatif, doit devenir positif, ou inversement : donc il doit devenir nul, ou infini, ou plus généralement, discontinu. Les points déterminés par ces conditions sont donc ceux auxquels peuvent correspondre des inflexions. On voit donc que cela revient à déterminer les maxima et minima de $\frac{dy}{dx}$: c'est du reste ce que montrerait facilement l'interprétation géométrique des théorèmes précédents. — Il faudra donc avoir recours à $\frac{d^3y}{dx^3}$ pour savoir s'il y a réellement inflexion, et de quelle manière elle a lieu.

Rem. — on rencontre quelquefois cette expression : arc de courbe convexe, d'une manière absolue. C'est un arc tel qu'une droite ne peut le rencontrer en plus de deux points.

Il résulte de ce qui précède que

Pour qu'un arc soit convexe, il faut et il suffit que la dérivée $\frac{dy}{dx}$ soit continue et toujours croissante

ou décroissante pour tous les points de la courbe appartenant à cet arc.

Points de Rebroussement.

Le point de rebroussement est un point où deux branches de courbe viennent se réunir et s'arrêtent, tout en y ayant la même tangente.

D'abord, le point de rebroussement est un point multiple. Donc on doit avoir

$$\left\{\begin{array}{ll} f(xy)=0 & (1) \\ \frac{df}{dx}=0 & (2) \\ \frac{df}{dy}=0 & (3) \end{array}\right.$$

On distingue des points de rebroussement de deux espèces, suivant que les deux branches de courbe sont de part et d'autre ou du même côté de la tangente.

Dans le cas présent, que devra-t-il advenir de l'Eq. du 2. degré qui donnait les deux tangentes (p. 111)? Ses racines devront être égales.

Tout cela indique qu'il peut y avoir rebroussement: mais cela peut être tout aussi bien un point multiple. — Il faut de plus que l'ordonnée devienne imaginaire quand on fait varier x très-peu à droite ou à gauche du point de rebroussement.

Maintenant, comment distinguera-t-on la première espèce de rebroussement de la seconde? C'est que, dans le 1er. cas, une des branches sera convexe, l'autre concave

vers l'axe des x, et que, dans le second, elles seront toutes les deux concaves ou toutes les deux convexes. ainsi, pour les rebroussements de première espèce, les deux valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$ devront avoir des signes contraires, tandis que, pour les rebroussements de seconde espèce, elles devront être de même signe.

Pour application, on pourra considérer la courbe

$$y = \varphi(x) + (x-a)^{\frac{2p+1}{2q}} F(x)$$

qui présente un point de rebroussement au point dont l'abscisse est a.

on pourra aussi discuter la Lemniscate hyperbolique

$$(y^2+x^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

qui est le Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'une hyperbole équilatère sur ses tangentes.

Points conjugués ou Isolés.

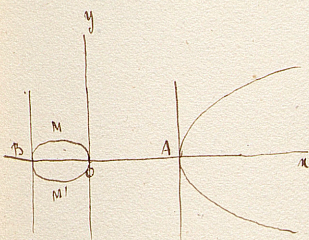
Ce sont des points dont les coordonnées vérifient l'Eq. de la courbe, sans qu'aucun point voisin y satisfasse.

Supposons qu'on ait l'Eq.

$$y^2 = x(x-a)(x+b)$$

D'où

$$y = \pm\sqrt{x(x-a)(x+b)}$$



a et b étant supposés positifs. Il est facile de voir que la courbe a sensiblement la forme représentée sur la figure, $OB = b$ en valeur absolue. Si maintenant on suppose que b diminue indéfiniment, la branche de

courbe OMM'B se réduit à zéro, de sorte que l'équation

$$y = x\sqrt{x-a}$$

représente une courbe pour laquelle l'origine est un point isolé. — On se rend bien compte ainsi de la manière dont peuvent apparaître les points isolés.

Il est évident qu'en ces points, il n'y a pas de tangente possible : donc $\frac{dy}{dx}$ est imaginaire.ˣ donc $\frac{df}{dx}$ et $\frac{df}{dy}$ doivent être nuls, puisqu'une éq. du 1er degré ne peut avoir de racines imaginaires, et l'éq. du 2d degré à laquelle on a recours alors doit donner pour $\frac{dy}{dx}$ une valeur impossible.

ˣ faux. car la courbe $y = x^2\sqrt{x-a}$ donne $\frac{dy}{dx} = 0$ à l'orig.

Points d'arrêt.

Ce sont les points où s'arrête brusquement une branche unique de courbe.

Les courbes algébriques en général n'offrent pas de points d'arrêt. Cependant, on en trouverait si l'on considérait des courbes dans l'équation desquelles il entre des radicaux, et si l'on prenait les radicaux avec un seul signe.

Mais, dans les courbes transcendantes, cela se présente quelquefois : les courbes logarithmiques

$$y = \frac{1}{Lx}$$

$$y = x\,Lx$$

présentent un point d'arrêt à l'origine.

$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

est dans le même cas.

Points Saillants ou anguleux.

C'est des points où s'arrêtent brusquement deux branches de courbe qui n'y ont pas la même tangente.

La dérivée $\frac{dy}{dx}$ doit évidemment devenir discontinue quand on passe par un point saillant. C'est ce qui caractérise ces points.

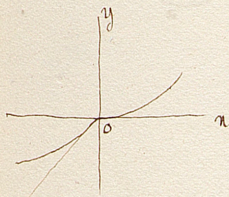
Ces points sont des points multiples, et on les trouve de même : ce qui les distingue des points de rebroussement, c'est que l'Eq. du 2^d. degré qui donne la tangente n'a plus ses deux racines égales.

Ces points sont aussi très-rares dans les courbes, et il n'y a guères que les courbes transcendantes qui en présentent.

Ex.

$$y = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

Si l'on fait $x=0$, on a $y=0$ soit que x converge vers zéro en restant positif ou négatif. — D'abord, si $x>0$ tend vers zéro, alors $\frac{y}{x}$ tend vers 0 : donc la tangente est l'axe des x ; si $x<0$ tend vers zéro, alors $\lim. \frac{y}{x} = 1$. Donc, au point 0, il y a deux branches qui ont des tangentes différentes.



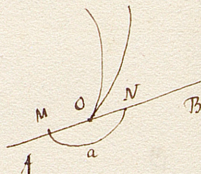
De même pour $y = x . \text{arc} \, Tg \frac{1}{x}$.

Remarque Générale. — M^r. Cauchy donne dans son analyse le moyen de reconnaître directement que, pour les points conjugués, angulaires, d'arrêt, de rebroussement, on a constamment les Eq. simultanées :

$$\frac{df}{dx} = 0 \quad \frac{df}{dy} = 0 \quad f(x,y) = 0$$

Nous l'avons déjà constaté pour les points multiples, les points anguleux et ceux de rebroussement. — Pour les points conjugués : il n'y a pas de tangente en ces points. Donc l'Eq. qui la donne doit devenir impossible. Donc $\frac{df}{dx}$ et $\frac{df}{dy}$ doivent être nuls, et l'Eq. du 2^d. degré avoir ses racines imaginaires.

Démontrons directement que, dans les 4 cas en question, on a les 3 Equations précédentes. — Nous supposerons que $f(x,y)$ est continue dans le voisinage du point singulier O considéré. — Par le point O il sera toujours possible de mener une infinité de droites telles que, d'un côté au moins de ces droites, et dans le voisinage du point O, il n'y ait pas de point de la courbe. On conclut delà que si, sur une de ces droites AB, de part et d'autre de O, on prend deux points M et N, $f(x,y)$ devra avoir des valeurs de même signe pour M et pour N : car, si cela n'était pas, comme on peut mener de M à N un arc de courbe MaN qui ne rencontre pas la courbe proposée, on pourrait aller de M à N en suivant MaN, et la fonction $f(x,y)$ passant du positif au négatif, s'annulerait dans l'intervalle, et il y aurait sur MaN un point de la courbe. Donc $f(x,y)$ a le même signe pour M et pour N. Mais f est nul au point O : donc, pour O, f est maximum ou minimum ; donc sa dérivée est nulle, et



$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

je le répète, pour les coordonnées du point O, quand on considère celles des différents points voisins de AB.
Mais, supposons que $y = ax + b$ soit l'Eq. de AB.

alors, dans l'éq. précédente, on a $\frac{dy}{dx} = a$. Donc on doit avoir

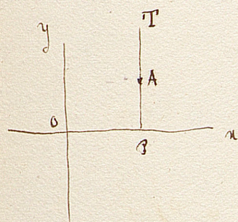
$$\frac{df}{dx} + a\frac{df}{dy} = 0$$

Mais cette équation devant avoir lieu pour une infinité de valeurs de a, il faut que

$$\frac{df}{dx} = 0 \qquad \frac{df}{dy} = 0$$

C.q.f.d.

Il y a, dans la théorie des points singuliers, un cas particulier qui mérite une discussion spéciale. C'est celui où l'on a $\frac{dy}{dx} = \infty$. Cela veut dire qu'en ce point la tangente est parallèle à l'axe des y.



Soit alors $y = f(x)$ l'éq. de la courbe, et $x = a$ l'abscisse OB du point singulier A. On considérera les valeurs de $f(a-h)$ et de $f(a+h)$.

alors, si $f(a-h)$ et $f(a+h)$ sont toutes deux réelles, et ont chacune une seule valeur: et si toutes deux sont $> f(a)$ ou $< f(a)$, il y a un point de rebroussement de 1ère espèce. — Si l'une est $> f(a)$ et l'autre $< f(a)$, il y a inflexion.

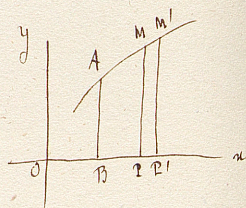
Supposons maintenant que $f(a-h)$ soit imaginaire, et que $f(a+h)$ ait deux valeurs réelles. Si elles sont toutes deux $> f(a)$ ou $< f(a)$, il y a rebroussement de 2e espèce: si l'une est $> f(a)$ et l'autre $< f(a)$, il y a une simple limite de courbe, une abscisse maximum.

Enfin, si $f(a-h)$ est imaginaire et si $f(a+h)$ n'a qu'une valeur, il y a point d'arrêt.

Différentielle de l'aire
d'une courbe plane.

Soit z l'aire.
on trouve facilement

$$dz = y\,dx .$$



Car $\Delta z = MM'P'P$, est compris entre $MP.\Delta x$ et $M'P'.\Delta x$, deux parallélogrammes. Donc

$$MP < \frac{\Delta z}{\Delta x} < M'P'$$

$$\text{Lim.}\ \frac{\Delta z}{\Delta x} = MP$$

$$\frac{dz}{dx} = y \qquad \text{cqfd.}$$

Si les axes font l'angle θ, alors

$$dz = y \sin\theta\, dx .$$

En coordonnées polaires Voir p. 219.

$$dz = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Différentielle de l'arc d'une courbe plane.

Voir p. 421.

L'arc d'une courbe est la limite vers laquelle tend le périmètre d'une ligne brisée régulière inscrite quand le nombre des côtés augmente indéfiniment.

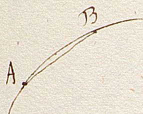
On trouve

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

En coordonnées polaires :

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$$

Corollaire. — Le rapport de l'arc à sa corde tend vers l'unité.



$$\frac{\Delta s}{AB} = \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\Delta x^2}}}$$

$$\lim. \frac{\Delta s}{AB} = \frac{\frac{ds}{dx}}{\sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2}}} = 1$$

C'est pour cela que, dans toutes les théories du calcul différentiel où il ne s'agit que de limite de rapports, on pourra remplacer la corde par l'arc, et réciproquement : car ils ne diffèrent que d'un infiniment petit du second ordre.

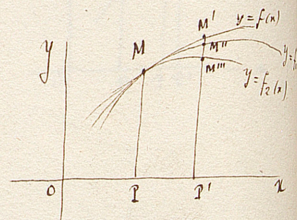
On peut même démontrer que

L'arc et sa corde ne diffèrent que d'un infiniment petit du troisième ordre.

Contact des Courbes Planes.

Définition. – Deux courbes ont un contact de l'ordre n lorsque les n premières dérivées sont égales pour les coordonnées du point de contact.

Il en résulte que la différence des ordonnées de deux points voisins qui ont même abscisse est un infiniment petit de l'ordre $n+1$.



J'admets en effet que l'on ait

$$f(x) = f_1(x)$$
$$f'(x) = f_1'(x)$$
$$\vdots$$
$$f^n(x) = f_1^n(x)$$

alors

$$M'M'' = \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\left\{f^{n+1}(x) - f_1^{n+1}(x) + \varepsilon\right\} \quad \Big| \lim \varepsilon = 0$$

Donc $M'M''$ est un infiniment petit du $(n+1)^e$ ordre.

Quand ces propriétés sont remplies, le caractère géométrique des deux courbes, c'est que, dans le voisinage du point M, elles sont plus rapprochées l'une de l'autre que deux courbes pour lesquelles les conditions précédentes ne seraient pas remplies.

En effet, considérons les courbes MM' et MM''' pour lesquelles les p premières dérivées sont égales, $p < n$.

alors
$$M'M''' = \frac{h^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)} A \qquad A \text{ est essentiellement fini.}$$

$$\lim . \frac{M'M''}{M'M'''} = 0$$

Donc $M'M'''$ est infiniment plus grand que $M'M''$.
c. q. f. d.

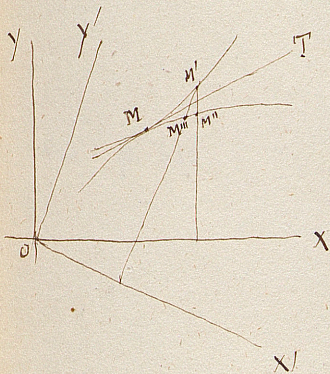
Le contact d'une tangente avec une courbe n'est que du 1er. ordre, parce que l'éq. d'une tangente n'a qu'une dérivée : la différence entre l'ordonnée de la tangente et celle de la courbe pour un point voisin est donc un infiniment petit du 2e. ordre.

à fortiori :

La distance d'une courbe à sa tangente est un infiniment petit du second ordre.

Il y a certaines tangentes où le contact est du 2e. ordre : par exemple, celles aux points d'inflexion, car alors $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ pour la courbe.

Théorème. _ L'ordre du contact de deux courbes ne dépend pas de la position des axes.



En effet, le contact étant d'ordre n, $M'M''$ est de l'ordre $n+1$: et je dis que $M'M'''$ est du même ordre $n+1$.

Car
$$\frac{M'M''}{M'M'''} = \frac{\sin M'''}{\sin M''}$$
or, à la limite, la corde $M'M'''$ devient la tangente en M ; M''' devient l'angle de la tangente MT avec l'axe des Y', et M'' celui de la tangente avec l'axe des Y : donc
$$\text{Lim.} \frac{M'M''}{M'M'''} = \frac{\sin(MT, Y')}{\sin(MT, Y)}$$
quantité finie, toutes les fois que l'axe des y n'est pas parallèle à la tangente MT. avec cette condition, le théorème est donc démontré.

---

on peut considérer autrement le contact des courbes, et dire :

Lorsqu'une courbe MB a un contact d'un certain ordre n avec une autre courbe MA, on peut regarder MB comme une position limite d'une autre courbe, laquelle avait avec MA (n+1) points communs qui se sont rapprochés l'un de l'autre jusqu'à se confondre en un seul.

Supposons en effet une courbe MC ayant un point commun M avec AB : on aura

$y = f(x),\ y = f_1(x)$: $\qquad f(x) = f_1(x) \qquad (1)$

s'il y en a un second M', on aura

$$f(x+h) = f_1(x+h)$$

ou

$$f(x) + h\{f'(x)+\varepsilon\} = f_1(x) + h\{f'_1(x)+\varepsilon'\}$$

et, à cause de (1)

$$f'(x) + \varepsilon = f'_1(x) + \varepsilon'$$

et si h tend vers zéro, $\qquad f'(x) = f'_1(x) \qquad (2).$

En poursuivant de même, on voit que l'énoncé est justifié.

Définition. — On dit qu'une courbe est osculatrice d'une autre courbe donnée lorsqu'elle a avec celle-ci le contact de l'ordre le plus élevé possible.

Soit
$$y = f(x)$$
une courbe complètement déterminée : et soit
$$y = \varphi(x, a, b, c ..)$$
une autre courbe, où φ est une fonction déterminée, qui contient des paramètres. On peut se proposer de disposer de ces paramètres de manière que cette 2de

courbe approche la première, et ait avec elle un contact de l'ordre le plus élevé possible. — alors la 2e. sera osculatrice de la première.

ainsi, l'ordre de contact d'un cercle avec une courbe est au plus du second ordre: car l'Eq. d'un cercle est du 2e. degré et ne contient pas que deux dérivées.

Peut-on toujours déterminer le cercle osculateur d'une courbe en un point? Dans l'Eq. du cercle, il y a trois paramètres. or on doit avoir

$$f(x) = \varphi(x)$$
$$f'(x) = \varphi'(x)$$
$$f''(x) = \varphi''(x)$$

ce qui fait 3 équations entre 3 les paramètres inconnus: donc le problème est possible en général.

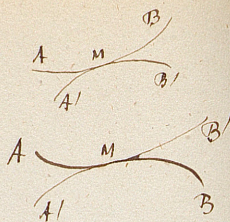
La Parabole, dans son équation générale, contient 4 paramètres: la parabole osculatrice aura donc avec une courbe quelconque un contact du 3e. ordre.

Voir p. 426.

En général, supposons qu'il faille établir un contact de l'ordre n, et que p soit le nombre des paramètres arbitraires. Si $p > n+1$, il y aura une infinité de manières d'établir le contact; si $p = n+1$ il n'y en aura qu'une seule, et la 2e. courbe sera osculatrice de la 1re.; si $p < n+1$, le problème sera généralement impossible.

Il y a une différence essentielle entre les contacts d'ordre pair et ceux d'ordre impair.

Dans les contacts d'ordre impair, la 2e. courbe tangente



à la première reste d'un même côté de celle-ci ; au contraire, dans les contacts d'ordre pair, les deux courbes se coupent, se traversent mutuellement.

En effet, supposons que deux courbes, AMB et A'MB' aient un contact d'ordre impair, du 3e. par exemple. alors on a

$$y' - y = f_1(x+h) - f(x+h)$$

et en développant d'après la série de Taylor, comme $f_1(x) = f(x)$, $f_1'(x) = f'(x)$, $f_1''(x) = f''(x)$ et $f_1'''(x) = f'''(x)$, on a

$$y' - y = A.\,h^4$$

et la différence des ordonnées $y' - y$ conserve le même signe, que h soit >0 ou <0.

C'est le contraire pour les contacts d'ordre pair.

Par exemple : Le cercle osculateur en un point d'une courbe, la traverse nécessairement.

Cercle Osculateur.

Cherchons les équations qui servent à déterminer le centre et le rayon du cercle osculateur.

Soit

$$y = f(x)$$

l'éq. d'une courbe, et

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \qquad (1)$$

l'éq. du cercle osculateur au point M : cherchons α, β et R.



Désignons par p et q les dérivées $f'(x)$ et $f''(x)$

Différentions l'Eq. (1) :

$$(x-\alpha) + (y-\beta)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (2)$$

on doit avoir $\frac{dy}{dx} = p$. donc

$$x-\alpha + p(y-\beta) = 0 \qquad (3)$$

Différentions encore l'Eq. (2) ; il vient

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

et par suite, comme on doit avoir $\frac{dy}{dx}=p$ et $\frac{d^2y}{dx^2}=q$,

$$1+p^2+(y-\beta)q = 0 \qquad (4)$$

Les Equations (1), (3), (4) donneront α, β, R. achevant le calcul, on trouve

$$\begin{cases} y-\beta = -\frac{1+p^2}{q} \\ x-\alpha = \frac{p(1+p^2)}{q} \\ R = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} \end{cases}$$

Il est facile de voir d'après ces valeurs que le centre du cercle osculateur est toujours dans la concavité de la courbe. Car on voit que $\beta-y$ est toujours du même signe que q, donc que β est $>$ ou $<$ y selon que q est >0 ou <0, c.à.d. selon que la courbe est convexe ou concave vers l'axe des x.

On appelle *Développée* d'une courbe le Lieu Géométrique des Centres de ses cercles Osculateurs.

Il est clair que l'Eq. de la développée s'obtiendra en éliminant x et y entre les 3 Equations

$$\begin{cases} f(x,y)=0 & (1) \\ (x-\alpha)+p(y-\beta)=0 & (2) \\ 1+p^2+q(y-\beta)=0 & (3) \end{cases}$$

Théorème. — Le centre du cercle osculateur est sur la Normale à la courbe.

C'est évident, puisque la courbe et le cercle ont même tangente.

Théorème. — Le rayon du cercle osculateur est tangent à la développée.

En effet, différentions l'Eq. (2) en y considérant α et β comme variables. Il viendra

$$1-\frac{d\alpha}{dx}+q(y-\beta)+p^2-p\frac{d\beta}{dx}=0$$

en vertu de l'Eq. (3) il reste

$$-\frac{d\alpha}{dx}-p\frac{d\beta}{dx}=0$$

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{1}{p} \qquad \text{cqfd.}$$

Rem. Il me semble qu'on pourrait différentier (2) par rapport à α et β comme seules variables. on aurait $-d\alpha-pd\beta=0$ d'où $\frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{1}{p}$. } il te semble mal.

Théorème. La différence des rayons de deux cercles osculateurs est égale à l'arc de développée compris entre les centres correspondants.

En effet, prenons l'Eq.

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2 \qquad (4)$$

Je dis que
$$d\rho=\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2}$$

Différentions l'Eq. (4) en considérant x comme variable indépendante.

on aura

$$(x-\alpha)\left(1-\frac{d\alpha}{dx}\right)+(y-\beta)\left(p-\frac{d\beta}{dx}\right)=\rho\frac{d\rho}{dx}$$

Mais on a
$$(x-\alpha)+p(y-\beta)=0 \qquad (2)$$
et il reste

$$(x-\alpha)\frac{d\alpha}{dx}+(y-\beta)\frac{d\beta}{dx}=-\rho\frac{d\rho}{dx} \qquad (5)$$

Il faut faire disparaître $x-\alpha$, $y-\beta$ et ρ. – or, en remplaçant dans l'Eq. (2) p par la valeur tirée de

$$\frac{\frac{d\beta}{dx}}{\frac{d\alpha}{dx}}=-\frac{1}{p}$$

elle devient

$$(x-\alpha)\frac{d\beta}{dx}-(y-\beta)\frac{d\alpha}{dx}=0 \qquad (6)$$

ajoutant les carrés des Equations (5) et (6), on a

$$\left\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\right\}\left\{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2\right\}=\rho^2\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2$$

d'où

$$d\rho=\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2}$$

ainsi, σ désignant l'arc de développée, on a

$$d\rho=d\sigma$$

en intégrant

$$\rho=\sigma+k$$

de même

$$\rho'=\sigma'+k$$

d'où

$$\rho-\rho'=\sigma-\sigma' \qquad \text{c.q.f.d.}$$

De là résulte la description mécanique de la développante au moyen de la développée.

à une développée correspondent une infinité de développantes, évidemment équidistantes. – au contraire,

à une développante ne correspond qu'une seule dévelop-
pée.

---

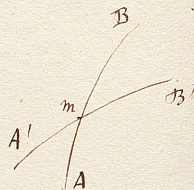
avant de passer à une autre propriété des développées,
il est nécessaire de dire quelques mots des

Courbes Enveloppes.

Soit

$$f(x, y, a) = 0$$

une équation contenant un paramètre arbitraire.
Si l'on donne à a une valeur déterminée, on aura
une certaine courbe ; si on lui donne la valeur $a+h$,
on aura une nouvelle courbe différente, et coupant
généralement la première en un point m, dont les
coordonnées seront fournies par les deux équations



$$\begin{cases} f(x, y, a) = 0 \\ f(x, y, a+h) = 0 \end{cases}$$

et l'on aura le lieu des points m en éliminant a
entre ces deux équations, et faisant tendre h vers zéro.
or, dans le système des deux éq. simultanées, on
peut remplacer l'une d'elles par

$$\frac{f(x, y, a+h) - f(x, y, a)}{h} = 0$$

et, si h converge vers zéro, on a les deux équations

$$\begin{cases} f(x, y, a) = 0 \\ f'_a(x, y, a) = 0 \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{cases} f = 0 \\ \frac{df}{da} = 0 \end{cases}$$

En éliminant a, on a le lieu.

Ce lieu touche toutes les courbes variables.

Soit PQ l'enveloppe, et M un de ses points. Je dis d'abord qu'en M passe une des courbes variables : cela est clair ; car l'équation

$$f(x,y,a)=0$$

donne évidemment une valeur de a correspondante aux coordonnées x et y du point M. — Maintenant, je dis qu'en M, l'enveloppe et la courbe variable ont même tangente. En effet, l'éq. précédente donne

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{df}{da}\cdot\frac{da}{dx}=0$$

Mais $\frac{df}{da}=0$. Donc

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Théorème. — Le lieu des intersections successives des normales à une courbe est la développée.

L'équation de la courbe est

$$f(x,y)=0$$

Celle de la normale au point x,y

$$x-\alpha+p(y-\beta)=0$$

La normale variant, le paramètre arbitraire est x ; quant à y, c'est une fonction d'x donnée par la 1ère éq. de façon que la 2e peut être regardée comme ne contenant que α, β, et le paramètre x. Il faudra donc éliminer x entre l'éq. de la normale et sa dérivée par rapport à x, qui est

$$1 + p^2 + q(y-\beta) = 0$$

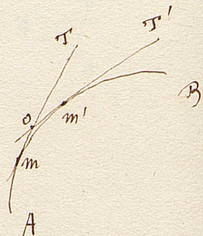
Donc il reviendra au même d'éliminer x et y entre les 3 équations

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ (x-\alpha) + p(y-\beta) = 0 \\ 1 + p^2 + q(y-\beta) = 0 \end{cases}$$

ce qui donnera, on le sait, la développée.

Courbure des Courbes Planes.

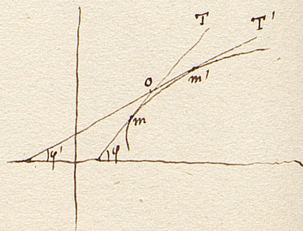
Soit AB une courbe plane quelconque, m et m' deux points voisins, mT et m'T' les deux tangentes; il existe en général un certain rapport entre l'angle TOT' et l'arc mm'. Lorsque m' se rapproche de m, ce rapport change le plus souvent: car en général, l'angle TOT' ne varie pas proportionnellement à l'arc mm': et il n'y a que le cercle où cela soit vrai. — En général, ce rapport tend vers une certaine limite que l'on appelle la Courbure de la courbe au point m.



On appelle Rayon de Courbure le rayon d'un cercle qui aurait même courbure que la courbe au point m: et si l'on suppose ce cercle convenablement placé, c.à.d. tangent en m à la courbe, son centre étant dans la concavité, ce centre est le Centre de Courbure de la courbe.

Soit φ l'angle de la tangente avec l'axe des x. on a

$$TOT' = \varphi - \varphi' = \Delta\varphi.$$



et comme arc $mm' = \Delta s$,

$$\text{Courbure} = \lim. \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}$$

Dans le cercle, la courbure est $\frac{1}{R}$. Donc, si ρ est le rayon cherché

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds}$$

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi}.$$

Cet angle $d\varphi$ est l'angle de contingence.

Or ~~on sait~~ que

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

D'ailleurs

$$\operatorname{Tg}\varphi = \frac{dy}{dx}$$

Donc

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = q$$

Donc

$$\frac{d\varphi}{dx} = q \cos^2\varphi$$

Mais $\operatorname{Tg}\varphi = p$ et $\cos^2\varphi = \frac{1}{1+p^2}$:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{q}{1+p^2}$$

Mais

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+p^2}$$

Donc

$$\rho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

Donc le rayon de courbure d'une courbe en un point coïncide avec le rayon du cercle osculateur.

Le centre de courbure n'est donc autre chose que le centre du cercle osculateur.

En partant de la formule

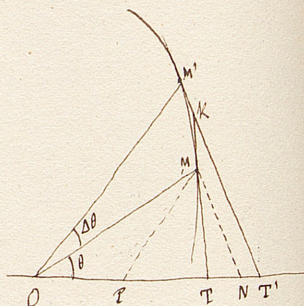
$$\rho = \frac{ds}{d\varphi}$$

on peut facilement trouver le Rayon de Courbure en coordonnées polaires.

On sait en effet que

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$$

Pour avoir $d\varphi$, menons MN parallèle à M'T'. On aura ; (en menant aussi MP parallèle à OM') :



$$\Delta\varphi = OMN - OMT$$

$$= OMP + PMN - OMT$$

$$= \Delta\theta + OM'T' - OMT$$

$$= \Delta\theta + V - V'$$

$$= \Delta\theta + \Delta V$$

d'où

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\theta} = 1 + \frac{\Delta V}{\Delta\theta}$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = 1 + \frac{dV}{d\theta}$$

or

$$\operatorname{tg} V = r\frac{d\theta}{dr} = \frac{r}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)}$$

d'où, en différentiant,

$$\frac{1}{\cos^2 V} \cdot \frac{dV}{d\theta} = \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}$$

Donc

$$\rho = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}$$

On peut encore y arriver par le Changement de Variable Indépendante.

Voir pour ces Changements de variable, p. 428.

---

application à quelques courbes, p. 434.

Cycloïde, p. 440.

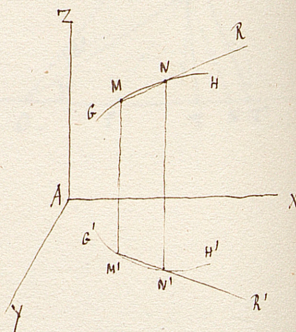
Différentiation des fonctions de plusieurs variables p. 448.

Série de Taylor pour plusieurs Variables, ... p. 457.

Maxima et Minima des fonctions de plusieurs Variables. p. 463.

Lignes à Double Courbure.

Tangentes.



Soient M et N deux points voisins de la Courbe GH, et la Sécante MNR. Menons le Plan MRM'R'. M'R' devient tangent en M' en même temps que MR en M. Donc.

La projection de la Tangente à une Courbe est Tangente à la projection de cette Courbe.

On voit que ce Résultat est tout-à-fait indépendant des angles des axes. Il sera le même si l'on prend des projections Coniques.

Donc:

Si l'on prend les projections d'une courbe sur deux plans, et qu'on leur mène des Tangentes, on aura les Projections de la Tangente à la Courbe.

Voir p. 476.

Supposons que les Equations de GH soient

$$y = \varphi(x)$$
$$z = \psi(x)$$

Soient x, y, z les coordonnées du point M par lequel la Tangente est menée, et $x'\,y'\,z'$ les coordonnées Courantes de la Tangente. Le point M' a pour coordonnées $x'\,y'$ et $z'=0$. En M', menons la Tangente. Son Equation sera

$$(m) \quad y' - y = \frac{dy}{dx}\,(x' - x) \qquad \frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$$

C'est donc là une des équations de la tangente. — L'autre serait de même

$$(n) \qquad z'-z = \frac{dz}{dx}(x'-x) \qquad\qquad \frac{dz}{dx} = \psi'(x)$$

Plan Normal.

C'est un plan mené par le point de contact perpendiculairement à la tangente.

Supposons les plans coordonnés rectangulaires. Le plan normal, devant passer par $M(x, y, z)$, aura une équation de la forme

$$x'-x = \alpha(y'-y) + \beta(z'-z) \qquad (1)$$

β et α étant des coefficients à trouver. — Or les traces du plan normal doivent être perpendiculaires aux projections de la tangente. La trace sur le plan des xy s'obtiendra en faisant $z'=0$: c'est

$$x'-x = \alpha(y'-y) - \beta z$$

Cette droite et celle que représente l'Eq. (m) doivent se couper à angle droit. Donc

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{dy}{dx} = -1$$

$$\alpha = -\frac{dy}{dx}$$

De même

$$\beta = -\frac{dz}{dx}$$

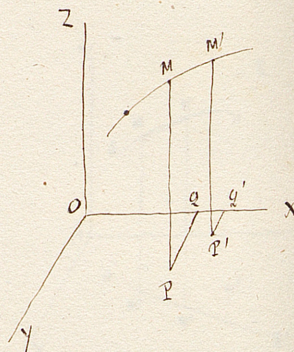
Donc l'Equation du plan normal devient :

$$(x'-x)\,dx + (y'-y)\,dy + (z'-z)\,dz = 0$$

Différentielle de l'arc.

Soit

$$AM = s = \psi_1(x)$$



cherchons ds. Nous admettrons que la limite du rapport de l'arc infinim^t. petit à sa corde est l'unité.
Cela posé, il s'agit de trouver

$$\lim \frac{\text{arc } MM'}{\Delta x}$$

faisons $\Delta x = h$. on a

$$\frac{s'-s}{h} = \frac{s'-s}{\text{Corde } MM'} \times \frac{\text{Corde } MM'}{h}$$

$$\lim . \frac{s'-s}{h} = \lim . \frac{\text{Corde } MM'}{h}$$

Voir p. 474.

or

$$\text{Corde } MM' = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$$

$$\frac{\text{Corde } MM'}{h} = \sqrt{1 + \left(\frac{y'-y}{h}\right)^2 + \left(\frac{z'-z}{h}\right)^2}$$

Donc

$$\lim . \frac{s'-s}{h} \quad \text{ou} \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Cela a été trouvé en regardant x comme variable indépendante : mais, pour le 1er. ordre, le choix de la variable indépendante est arbitraire ; donc ici, elle est

indifférente.

Cherchons, d'après cette valeur de ds, les angles que fait la tangente avec les axes.

on a
$$\cos M'MX' = \frac{MP}{MM'} = \frac{\Delta x}{\Delta s} \times \frac{\Delta s}{\text{corde}}$$

et à la limite,
$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}$$
$$\cos \beta = \frac{dy}{ds}$$
$$\cos \gamma = \frac{dz}{ds}$$

Ces valeurs, si l'arc croit dans le sens MM', correspondent à la partie de la tangente MT, dirigée dans le sens où les arcs croissent : c'est facile à voir.

On peut déduire immédiatement de là l'Equation du plan normal. — Soit MN une droite quelconque du plan normal passant par M. Les cosinus des angles de cette droite avec les axes sont
$$\frac{x'-x}{MN} \qquad \frac{y'-y}{MN} \qquad \frac{z'-z}{MN}$$

ceux de la tangente
$$\frac{dx}{ds} \qquad \frac{dy}{ds} \qquad \frac{dz}{ds}$$

ces deux droites doivent former un angle droit. Donc
$$(x'-x)dx + (y'-y)dy + (z'-z)dz = 0$$

c'est l'Eq. du plan normal.

Plan osculateur.

Si par trois points d'une courbe on fait passer un plan, et si l'on suppose que ces points se rapprochent indéfiniment, la limite du plan est le Plan osculateur.

Il est facile de le trouver.

Soient $x\ y\ z$ les coordonnées d'un point M. Je supposerai que $x\ y\ z$ soient fonction d'une même variable indépendante t. Pour M' t deviendra $t+\theta$ et les coordonnées de M' seront $x + \frac{dx}{dt}\theta + \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{\theta^2}{1.2} + \cdots$

$$y + \frac{dy}{dt}\theta + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{\theta^2}{1.2} + \cdots$$

$$z + \frac{dz}{dt}\theta + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{\theta^2}{1.2} + \cdots$$

Pour M'' je suppose que t devienne $t+2\theta$; alors les coordonnées de M'' seront

$$x + \frac{dx}{dt}\cdot 2\theta + \frac{d^2x}{dt^2}\cdot 2\theta^2 + \cdots$$

$$y + \frac{dy}{dt}\cdot 2\theta + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot 2\theta^2 + \cdots$$

$$z + \frac{dz}{dt}\cdot 2\theta + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot 2\theta^2 + \cdots$$

Cela posé, l'Eq. générale du plan est

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0 \qquad (\alpha)$$

Comme il passe par $x\ y\ z$, on aura

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

De plus, il passe par M'. Donc

$$Ax + By + Cz + D + \left\{A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt}\right\}\theta + \left\{A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{d^2y}{dt^2} + C\frac{d^2z}{dt^2}\right\}\frac{\theta^2}{2}$$

$$+ \text{etc} = 0 \qquad (2)$$

Enfin il passe en M''. Donc

$$Ax+By+Cz+D+\left\{A\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}+C\frac{dz}{dt}\right\}2\theta+\left\{A\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{d^2z}{dt^2}\right\}2\theta^2 + \text{etc.} = 0 \qquad (3)$$

Ces trois Equations donnent évidemment, pour $\theta=0$,

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 & (1)\\ A\,dx+B\,dy+C\,dz=0 & (2)\\ A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z=0 & (3)\end{cases}$$

Ces 3 Equations déterminent les coefficients de l'Eq. du plan osculateur.

Retranchant (1) de (2) on a

$$A(x'-x)+B(y'-y)+C(z'-z)=0$$

Et les Eq. (2) et (3) donnent $\frac{A}{C}$ et $\frac{B}{C}$:

$$A=-C\,\frac{dz\,d^2y-dy\,d^2z}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}$$

$$B=-C\,\frac{dx\,d^2z-dz\,d^2x}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}$$

Donc enfin l'Equation du Plan osculateur est

$$(x'-x)(dy\,d^2z-dz\,d^2y)+(y'-y)(dz\,d^2x-dx\,d^2z)+(z'-z)(dx\,d^2y-dy\,d^2x)=0$$

On peut encore la trouver immédiatement en faisant passer le plan par 3 points infiniment voisins

$$x \qquad y \qquad z$$

$$x+dx \qquad y+dy \qquad z+dz$$

$$x+2dx+d^2x \qquad y+2dy+d^2y \qquad z+2dz+d^2z$$

Si l'on pose maintenant

$$X = dy\,d^2z - dz\,d^2y$$
$$Y = dz\,d^2x - dx\,d^2z$$
$$Z = dx\,d^2y - dy\,d^2x$$

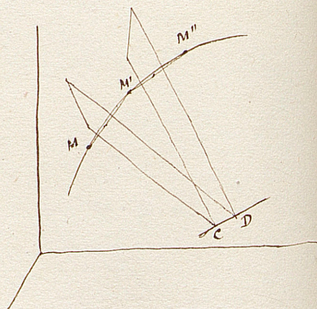
L'Eq. du plan osculateur s'écrira

$$X(x'-x) + Y(y'-y) + Z(z'-z) = 0$$

Cercle osculateur.

C'est le cercle qui passe par 3 points infiniment voisins. — Il est évident qu'il est dans le plan osculateur.

Cherchons son centre. — Supposons qu'on ait joint MM', M'M'', et élevé aux milieux des plans perpendiculaires qui se coupent suivant CD. Il est évident que le centre se trouvera sur CD. La sécante MM' devient à la limite une tangente. Donc le 1er. plan devient le plan normal, dont l'équation est



$$(x'-x)\,dx + (y'-y)\,dy + (z'-z)\,dz = 0$$

et à la limite, CD est dans ce plan. — En différentiant cette équation, nous aurons celle du 2d. plan normal, et, en ayant égard en même temps à l'Eq. partie différentiée, on aura

$$(x'-x)\,d^2x + (y'-y)\,d^2y + (z'-z)\,d^2z - ds^2 = 0$$

en posant $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$; équation qui n'est pas celle du 2d. plan normal, mais celle d'un plan contenant CD. Combinant ces deux équations avec celle du ~~cerc~~ plan osculateur, on aura $x'-x$, $y'-y$ et $z'-z$, c.à.d. les

les différences entre les coordonnées du centre du cercle osculateur et celles de M. on trouve

$$x' - x = \frac{ds^2 (Ydz - Zdy)}{D}$$

$$y' - y = \frac{ds^2 (Zdx - Xdz)}{D}$$

$$z' - z = \frac{ds^2 (Xdy - Ydx)}{D}$$

en posant pour abréger

$$D = (Ydz - Zdy)d^2x + (Zdx - Xdz)d^2y + (Xdy - Ydx)d^2z$$

Si je désigne par ρ le rayon du cercle osculateur, j'aurai donc

$$\rho^2 = \frac{ds^4}{D^2}\left\{(Xdy - Ydx)^2 + (Zdx - Xdz)^2 + (Ydz - Zdy)^2\right\}$$

Il y a des simplifications importantes. En effet, remarquons d'abord que

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

cela se voit immédiatement en se reportant aux valeurs de X, Y et Z (et aussi par la Géométrie). Maintenant, la quantité entre crochets devient, en développant

$$X^2(dy^2 + dz^2 + dx^2) - X^2dx^2 - 2XY\,dx\,dy$$
$$+\ Y^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) - Y^2dy^2 - 2YZ\,dy\,dz$$
$$+\ Z^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) - Z^2dz^2 - 2XZ\,dx\,dz$$

ou

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)ds^2 - (Xdx + Ydy + Zdz)^2$$

ou enfin
$$ds^2(X^2+Y^2+Z^2)$$
Donc
$$\rho^2 = \frac{ds^6}{D^2}(X^2+Y^2+Z^2)$$
Reste D^2 à simplifier. or on a
$$D = (Xdy - Ydx)d^2z + (Ydz - Zdy)d^2x + (Zdx - Xdz)d^2y$$
$$= X(dyd^2z - dzd^2y) + Y(dzd^2x - dxd^2z) + Z(dxd^2y - dyd^2x)$$
$$D = X^2 + Y^2 + Z^2$$
et par suite
$$\rho^2 = \frac{ds^6}{X^2+Y^2+Z^2}$$
Le dénominateur peut prendre une autre forme. Car:
$$X^2+Y^2+Z^2 = dx^2(d^2y^2+d^2z^2+d^2x^2) - dx^2d^2x^2$$
$$+dy^2(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2) - dy^2d^2y^2$$
$$+dz^2(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2) - dz^2d^2z^2$$
$$-2dxdyd^2xd^2y - 2dxdzd^2xd^2z - 2dydzd^2yd^2z$$
$$= ds^2(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2) - (dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z)^2$$
$$= ds^2(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2) - ds^2d^2s^2$$
$$= ds^2(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2 - d^2s^2)$$
Donc
$$\rho^2 = \frac{ds^4}{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2}$$

Dans ces calculs, le choix de la variable indépendante est resté arbitraire. — Si l'on prenait pour variable indépendante l'arc s, alors $d^2s=0$, et l'on a

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = ds^2 \left\{ d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 \right\}$$
$$= ds^6 \left\{ \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 \right\}$$
$$= ds^6 \left\{ \left(\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}\right)^2 \right\}$$

Maintenant, quelle que soit la variable indépendante, les rapports des différentielles restent les mêmes : et comme, en substituant dans ρ^2, ds^6 disparaît, on voit que, dans l'expression résultante,

$$\rho^2 = \frac{ds^2}{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}$$

Angle de Contingence,

Rayon de Courbure.

On appelle angle de contingence l'angle de la tangente en un point et de la parallèle à la tangente infiniment voisine.

Soit ε cet angle. Imaginons pour un instant qu'on place l'origine en M, et qu'on prenne $MT = MT' = 1$. alors les 3 coordonnées de T sont les 3 cosinus a, b, c des angles de MT avec les axes. Les coordonnées de T' sont $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, $c + \Delta c$. Donc



$$\text{Cord. } TT' = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2}$$
$$\frac{\text{Cord. } TT'}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c}{\Delta t}\right)^2}$$

Passons à la limite. Au numérateur, la corde peut être remplacée par l'arc. Mais l'arc TT' mesure l'angle ε : c'est ε même par convention. Donc

$$\varepsilon = \sqrt{da^2+db^2+dc^2}$$

Maintenant

$$a = \frac{dx}{ds}$$

$$b = \frac{dy}{ds}$$

$$c = \frac{dz}{ds}$$

Donc

$$(1) \qquad \varepsilon = \sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}$$

C'est là la forme habituelle. — En développant :

$$\varepsilon = \frac{1}{ds^2}\sqrt{(ds\,d^2x - dx\,d^2s)^2 + (ds\,d^2y - dy\,d^2s)^2 + (ds\,d^2z - dz\,d^2s)^2}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{ds^2}\sqrt{ds^2(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2) - 2ds\,d^2s\,(dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z) + d^2s^2(dx^2+dy^2+dz^2)}$$

Mais, en vertu de $ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2$, on a $ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z$

Donc il reste

$$(2) \qquad \varepsilon = \frac{1}{ds}\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2}$$

Enfin, en remarquant que $ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z$, on obtient aisément

$$(3) \qquad \varepsilon = \frac{1}{ds^2}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$$

X, Y, Z étant les coefficients du plan osculateur.

Rayon de courbure. — C'est le rayon d'un cercle qui, au point considéré, aurait même courbure que la courbe : et la courbure de la courbe est $\lim \frac{\varepsilon}{ds}$.
Donc on a

$$\rho = \frac{ds}{\varepsilon}.$$

on aura donc 3 expressions du Rayon de courbure, par exemple

$$\rho = \frac{ds^3}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

on voit que c'est la même que celle du rayon du cercle osculateur.

Il coïncide avec lui, si on le place de manière qu'il ait même tangente que la courbe en M, et qu'il soit dans le plan osculateur. Son rayon est dirigé suivant la Normale Principale, c.a.d. celle qui est dans le plan osculateur.

Cherchons encore les cosinus des angles que fait cette normale avec les axes. Sa direction est la limite de TT'.

Les cosinus des angles de MT sont $a \quad b \quad c$

" " MT' $a+da \quad b+db \quad c+dc$

Projetons MTM' sur l'axe des x, et parcourons ce contour dans le sens MT'T. Nous aurons

$$a = a + da - \varepsilon \cos\lambda$$

$$da = \varepsilon \cos\lambda$$

$$\cos\lambda = \frac{da}{\varepsilon}$$

donc

$$\cos\lambda = \frac{d.\frac{dx}{ds}}{\varepsilon}$$

de même

$$\cos\mu = \frac{d.\frac{dy}{ds}}{\varepsilon}$$

$$\cos\nu = \frac{d.\frac{dz}{ds}}{\varepsilon}$$

valeurs auxquelles on donne souvent la forme

$$\cos\lambda = \rho \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}$$

$$\cos\mu = \rho \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}$$

$$\cos\nu = \rho \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}$$

Quant aux coordonnées x' y' z' du centre, on a

$$\cos\lambda = \frac{x'-x}{\rho}$$

d'où

$$x'-x = \rho\cos\lambda$$

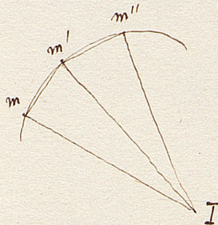
et par suite

$$x'-x = \rho^2 \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}$$

$$y'-y = \rho^2 \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}$$

$$z'-z = \rho^2 \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}$$

Remarque. – On peut démontrer à priori que le cercle de courbure se confond avec le cercle osculateur. Considérons le plan $m m' m''$. Menons en m une perpendiculaire à mm', et une à $m'm''$ en m''. Elles se coupent en I, de sorte que IM' sera le diamètre du cercle passant par $m\,m'\,m''$. Soit $2r$ ce diamètre. Je dis que $\text{Lim}\, r = \rho$, ou $\text{Lim}\, r = \frac{ds}{\varepsilon}$. L'angle I est l'angle de mm' avec $m'm''$. Donc si je l'appelle pour un instant ε, j'aurai



$$\varepsilon = \frac{\text{arc de cercle } m m' m''}{2r}$$

ou

$$\frac{\varepsilon}{\Delta t} = \frac{\frac{\text{arc de cercle } mm'm''}{\Delta t}}{2r}$$

Mais l'arc de cercle et l'arc de courbe ne diffèrent de leur corde commune que d'un infiniment petit du 2^d ordre. Donc

$$\frac{\varepsilon}{\Delta t} = \frac{\frac{\text{arc } mm'm''}{\Delta t}}{2r}$$

or arc $mm'm'' = mm' + m'm'' = \Delta s + (\Delta s + \Delta^2 s)$

Donc

$$\frac{\varepsilon}{\Delta t} = \frac{\frac{2\Delta s + \Delta^2 s}{\Delta t}}{2r}$$

$$\frac{\varepsilon}{dt} = \frac{1}{2}\,\frac{ds}{dt}$$

$$\varepsilon = \frac{ds}{r}$$

Donc

$$\text{Lim } r = \frac{ds}{\varepsilon} = \rho \qquad \text{c q f d.}$$

Il est bien évident d'ailleurs que l'angle que j'ai appelé ε n'est pas autre chose que l'angle de contingence, puisque les limites de mm' et de $m'm''$ sont les tangentes aux deux points infiniment voisins m et m'.

Angle de Torsion

C'est l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins.

on voit aisément qu'il est égal à l'angle de contingence de l'arête de rebroussement de la surface polaire (envelop.-pe des plans normaux).

on trouve (voir Duhamel).

$$\varphi = \frac{ds}{D^2}\left\{dx\left(d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y\right) + dy\left(d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z\right) + dz\left(d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x\right)\right\}$$

D ayant même valeur que précédemment.

Si x est pris pour variable indépendante, cette valeur se simplifie, mais n'est plus symétrique : elle devient

$$\varphi = \frac{dx\,ds}{D^2}\left(d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y\right)$$

Voir p. 278 et suivantes, ce qui concerne l'angle de torsion, et diverses remarques.

---

application à l'Hélice, p. 287.

Surfaces.

Plan Tangent et Normale.

Si par un point d'une Surface on trace une courbe quelconque, et qu'on lui mène une Tangente, le lieu de ces Tangentes est un plan qu'on appelle Plan Tangent à la surface.

Supposons que

$$z = f(x, y)$$

soit l'Equation de la surface. Soit M un point de coordonnées x, y, z. Traçons une courbe qcq. passant en M. Projetons la courbe sur le plan des xy; soit

$$y = \varphi(x)$$

l'Equation de cette projection. La projection sur le plan des zx s'obtiendra en remplaçant y par $\varphi(x)$ dans l'Eq. de la surface :

$$z = f(x, \varphi(x))$$

ainsi les Equations de la courbe sont

$$y = \varphi(x)$$
$$z = f(x, \varphi(x))$$

Les Equations de sa tangente en M sont donc :

$$y'-y = \frac{dy}{dx}(x'-x)$$

$$z'-z = \frac{dz}{dx}(x'-x)$$

et l'on a

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$$

Pour avoir $\frac{dz}{dx}$, il faut différentier $z = f(x, \varphi(x))$, ou bien $z = f(x\,y)$ avec $y = \varphi(x)$. On aura alors, en posant

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dz}{dx} = p \\ \frac{dz}{dy} = q\end{array}\right\} \text{ pour la surface}$$

$\frac{dz}{dx} = p + q\,\varphi'(x)$: et les équations de la tangente

$$y'-y = (x'-x)\,\varphi'(x)$$

$$z'-z = (x'-x)\{p + q\,\varphi'(x)\}$$

Si l'on élimine φ' on aura l'équation du lieu cherché. Or cette élimination donne

$$z'-z = p(x'-x) + q(y'-y)$$

Équation d'un plan, qui est le plan tangent.

Pour la normale, ses équations peuvent s'écrire

$$y'-y = a(x'-x)$$

$$z'-z = b(x'-x)$$

et il reste à trouver a et b. — La trace du plan tangent sur xoy est

$$-z = p(x'-x) + q(y'-y)$$

Son coefficient angulaire est $-\frac{p}{q}$. Donc

$$a = \frac{q}{p} = \frac{q}{p}.$$

on trouve de même $b = -\frac{1}{p}$

Donc les équations de la Normale sont

$$y' - y = \frac{q}{p}(x' - x)$$
$$z' - z = -\frac{1}{p}(x' - x)$$

elles ne sont pas symétriques. Mais, en cherchant la 3e projection, on prend les deux suivantes :

$$\begin{cases} y' - y + q(z' - z) = 0 \\ x' - x + p(z' - z) = 0 \end{cases}$$

ce sont celles qu'on emploie d'ordinaire.

Génération des Surfaces.

Une surface courbe est le lieu des positions d'une courbe qui se meut dans l'espace suivant une loi quelconque, et en variant elle-même de forme en même temps que de position suivant une loi déterminée.

Pour traduire ces mouvements variés dans l'analyse, on suppose que la courbe Génératrice de la surface glisse le long d'un certain nombre d'autres courbes Directrices de son mouvement.

Supposons que les Eq. de la courbe Génératrice soient :

$$(1)\quad \begin{cases} F(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)=0 \\ F_1(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)=0 \end{cases}$$

contenant n paramètres entre $\alpha\ \beta .. \gamma$. Il doit y avoir entre ces paramètres $n-1$ relations

$$\varphi(\alpha,\beta,..\gamma)=0$$

$$\varphi_1(\alpha,\beta..\gamma)=0$$

$$- - -$$

$$\varphi_{n-2}(\alpha,\beta,..\gamma)=0$$

afin qu'il n'en reste plus qu'un d'arbitraire. alors la Génératrice décrit un lieu parfaitement déterminé. Car on peut ramener ses Equations à ne plus contenir que le seul paramètre arbitraire α, et en lui donnant des valeurs particulières, on a autant de positions successives de la Génératrice. Donc en éliminant α entre les deux Equations ainsi préparées de la Génératrice, on aura l'Eq. de la Surface.

Supposons au contraire que dans les Equations de la Génératrice il reste, tout calcul fait, deux paramètres α et β. En éliminant β, on aura

$$\pi(x,y,z,\alpha)=0$$

qui représenterait une Surface si α était constant. Mais α est arbitraire. Donc, α variant, cette Surface varie indéfiniment de forme et de position. Donc en général on trouvera un Solide embrassant tout l'espace.

Soient par exemple les Equations de la Génératrice

$$\begin{cases} z = \alpha \\ x^2+(y-\beta)^2 = (z-\alpha)^2+R^2 \end{cases}$$

En éliminant α on obtient :

$$x^2+(y-\beta)^2 = R^2$$

Equation qui, pour chaque valeur de β, représente un cylindre parallèle à l'axe des z. Si β varie, on pourra donc le faire passer par un point quelconque de l'espace.

Si l'on a

$$\begin{cases} x-\beta = 0 \\ y^2+(z-\alpha)^2 = R^2-\beta^2 \end{cases}$$

en éliminant β :

$$y^2+(z-\alpha)^2+x^2 = R^2$$

Eq. qui représente une sphère de rayon fini R et dont le centre est sur OZ à une hauteur α. Il est donc clair qu'on obtiendra un solide cylindrique indéfini de rayon de base R.

Pour avoir les équations de condition pour φ, on prend des directrices.

Chaque directrice introduit une relation entre les paramètres. – Soient

$$(2) \quad \begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ f_1(x,y,z)=0 \end{cases}$$

Les équations d'une directrice. Les systèmes (1) et (2) doivent être vérifiés pour une même valeur de x, y et z. Donc si on les élimine, on aura une équation de

condition. — ainsi :

S'il y a n paramètres, il faut $n-1$ directrices.

appliquons ceci à quelques exemples.

Conoïdes.

Le Conoïde est engendré par une Génératrice Rectiligne glissant sur une directrice quelconque, en restant parallèle à un plan XOY par exemple et en s'appuyant en outre sur une droite fixe que je supposerai être l'axe des z.

Si la droite fixe était parallèle au Plan directeur, le conoïde deviendrait un plan : car la Génératrice passerait par un point fixe de la courbe directrice, et s'appuierait sur la droite.

Revenons au cas Général. Les équations de la Génératrice sont

$$\begin{cases} y = \alpha x \\ z = \beta \end{cases}$$

et celles de la directrice

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ f_1(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

entre ces 4 équations, il faut éliminer y, z et x. on aura un résultat de la forme

$$\beta = \varphi(\alpha)$$

Reste à éliminer β et α entre cette équation et les deux premières. Il reste

$$(\varepsilon) \qquad z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Telle est l'équation générale des conoïdes, φ représentant une fonction arbitraire.

Le calcul différentiel conduit à une équation commune à tous les conoïdes, quelle que soit la fonction φ. — Différentions (1) par rapport aux deux variables indépendantes x et y successivement, on aura

$$p = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \times \frac{-y}{x^2}$$

$$q = \frac{1}{x}\,\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

Éliminant φ', on a

$$px + qy = 0$$

C'est l'équation cherchée.

Elle exprime une propriété du plan tangent : c'est que le plan tangent en un point M de la surface renferme la génératrice en ce point. Cela doit être évidemment, d'après la définition même du plan tangent. Vérifions-le. L'équation générale du plan tangent est

$$z'-z = p(x'-x) + q(y'-y)$$

x, y, z sont les coordonnées du point M. Il faut exprimer que ce plan renferme la génératrice. Il faut donc écrire que ce plan coupe l'axe des z en un point donné z. or, en faisant $x' = y' = 0$, on a

$$z' = z - px - qy$$

et, comme on doit poser $z' = z$, il reste

$$px + qy = 0. \quad \text{c.q.f.d.}$$

Reprenons l'équation générale

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

et supposons que, cette équation étant donnée, ainsi qu'une directrice, on demande de déterminer la fonction φ d'après ces conditions. — Posons

$$\frac{y}{x} = \alpha$$

il vient

$$z = \varphi(\alpha)$$

Ces deux équations doivent subsister conjointement avec celles de la directrice. Eliminant x, y, z, on aura

$$\psi\left(\alpha, \varphi(\alpha)\right) = 0$$

ψ étant une fonction connue. On tirera de là $\varphi(\alpha)$

$$\varphi(\alpha) = \pi(\alpha)$$

donc

$$z = \pi\left(\frac{y}{x}\right)$$

est l'équation demandée.

Cones.

Soit α, β, γ le sommet. Les équations de la génératrice seront

$$\begin{cases} y - \beta = a(x - \alpha) \\ z - \gamma = b(x - \alpha) \end{cases}$$

et celles de la directrice

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ f_1(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

éliminant x, y, z, on aura

$$b = \varphi(a)$$

et par suite

$$\frac{z-\gamma}{x-\alpha} = \varphi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)$$

C'est l'équation générale des cônes.

on trouve que l'équation différentielle est

$$z-\gamma = p(x-\alpha) + q(y-\beta)$$

qui se tire du plan tangent en remarquant que ce plan passe au point α, β, γ.

Cylindres.

Leur équation générale est

$$y - bz = \varphi(x - az)$$

les équations de la génératrice étant

$$\left.\begin{aligned} x &= az + \alpha \\ y &= bz + \beta \end{aligned}\right\} \quad \alpha \text{ et } \beta \text{ paramètres.}$$

L'équation différentielle est

$$(1) \qquad ap + bq = 1$$

on peut la tirer de celle du plan tangent qui doit contenir la génératrice en ce point de contact. En effet, l'éq. du plan tangent est

$$z'-z = p(x'-x) + q(y'-y)$$

La droite $\left|\begin{matrix} x = az \\ y = bz \end{matrix}\right|$ doit être parallèle à ce plan. Donc si l'on remplace x' et y' par az et bz, la valeur

de z que donnera l'Eq. devra être infinie. Cette condition donne l'Eq. (r). — On peut encore dire : si par l'origine on mène une droite parallèle à la génératrice, et un plan parallèle au plan tangent, ce plan devra contenir cette droite.

Supposons qu'on donne l'Equation

$$y - bz = \varphi(x - az)$$

on voudrait que la surface cylindrique qu'elle représente fût circonscrite à une surface donnée. La question peut être ramenée à déterminer la courbe de contact, qu'on regardera comme la directrice du cylindre. — Cette courbe de contact est le lieu des points où le plan tangent aux deux surfaces est le même. Pour la surface donnée

$$f(x, y, z) = 0$$

l'Eq. du plan tangent est

$$(x' - x)\frac{df}{dx} + (y' - y)\frac{df}{dy} + (z' - z)\frac{df}{dz} = 0$$

Menons par l'origine une parallèle aux arêtes

$$\begin{cases} y = bz \\ x = az \end{cases}$$

cette droite est parallèle au plan précédent. Donc

$$(1) \qquad a\frac{df}{dx} + b\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz} = 0$$

Ceci est l'Equation d'une surface qui contient la courbe de contact. Nous avons d'ailleurs

$$(2) \qquad f(x, y, z) = 0$$

Ces deux Equations déterminent donc la courbe de contact.

Reste à trouver la forme de la fonction φ. Posons

$$x - az = \alpha$$

alors

$$y - bz = \varphi(\alpha)$$

Eliminons x, y, z entre ces équations et (1) et (2). alors :

$$\varphi(\alpha) = \varpi(\alpha)$$

Donc $\varphi = \varpi$, et

$$y - bz = \varpi(x - az)$$

sera l'équation demandée.

on peut encore se poser cette question : l'équation $L = 0$ représente-t-elle un cylindre ? on a

$$\begin{cases} \dfrac{dL}{dx} + p\dfrac{dL}{dz} = 0 \\ \dfrac{dL}{dy} + q\dfrac{dL}{dz} = 0 \end{cases}$$

Substituant dans (1)

$$a\frac{dL}{dx} + b\frac{dL}{dy} + \frac{dL}{dz} = 0$$

et l'on doit pouvoir choisir a et b de façon que cette Eq. soit identique.

Surfaces de Révolution.

C'est le lieu des positions d'un cercle se mouvant dans un plan perpendiculaire à son axe, en s'appuyant sur une directrice, et en variant de rayon de manière que son centre soit toujours sur l'axe fixe.

on trouve aisément que l'Eq. Générale est

$$ax + by + z = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)$$

pour l'axe quelconque, passant à l'origine ; et

$$z = \varphi(x^2 + y^2)$$

pour l'axe confondu avec Oz.

Dans ce même cas, l'équation aux différences partielles est

$$py - qx = 0.$$

on la trouve en remarquant que le plan tangent en un point est perp. au plan méridien correspondant.

Conoïdes Généralisés.

Une droite, parallèle à un plan directeur XOY, s'appuie sur deux directrices,

$$(1)\quad \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ F_1(x,y,z)=0 \end{cases}$$

et

$$(2)\quad \begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ f_1(x,y,z)=0 \end{cases}$$

Les équations de la génératrice seront

$$(3)\quad \begin{cases} z=\gamma \\ y=\alpha x+\beta \end{cases}$$

Eliminons x, y, z entre (1) et (3), entre (2) et (3) :

$$\beta = \varphi(\gamma)$$
$$\alpha = \varphi_1(\gamma)$$

Eliminant α, β, γ :

$$y = x\varphi_1(z) + \varphi(z)$$

ou, pour éviter les indices,

$$y = x\varphi(z) + \psi(z)$$

Il y a deux fonctions arbitraires. On ne pourra donc les éliminer en général qu'en descendant au 3e. ordre de différentiation. Ici, le 2e. suffit.

En différentiant une première fois, on aura :

$$0 = \varphi(z) + \{x\varphi'(z) + \psi'(z)\}.p$$

$$1 = \{x\varphi'(z) + \psi'(z)\}\, q$$

De ces deux Equations, on tire

$$\frac{p}{q} = -\varphi(z)$$

et il n'y a plus qu'une fonction $\varphi(z)$ à éliminer.
Différentiant encore, et posant :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2} = r \quad \Big| \quad \frac{dq}{dx} = \frac{d^2z}{dxdy} = s \quad \Big| \quad \frac{dq}{dy} = \frac{d^2z}{dy^2} = t$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{d^2z}{dxdy} = s$$

on aura

$$\frac{qr - ps}{q^2} = -p\,\varphi'(z)$$

$$\frac{qs - pt}{q^2} = -q\,\varphi'(z)$$

D'où

$$q^2r - 2pqs + p^2t = 0$$

Surfaces Développables.

Une Surface développable est le lieu des positions d'une droite mobile qui reste toujours tangente à une certaine courbe qu'on appelle l'arête de rebroussement ou la Caractéristique.

Soit MT une tangente mobile à la courbe

$$\begin{cases} x = \varphi(z) \\ y = \psi(z) \end{cases}$$

Donnons nous le z du point M. Soit $z = \alpha$. Les équations de la tangente seront

$$\begin{cases} x - \varphi(\alpha) = (z-\alpha)\,\varphi'(\alpha) & (1) \\ y - \psi(\alpha) = (z-\alpha)\,\psi'(\alpha) & (2) \end{cases}$$

En éliminant α, on aurait l'équation de la surface. Mais ici, l'élimination n'est pas possible.

Si l'on veut avoir l'équation aux différences partielles, il suffit de différentier les éq. (1) et (2) successivement par rapport à x et y. Nous aurons, α étant considéré comme fonction d'x et d'y (car z est fonction de ces deux variables)

$$1 - p\,\varphi'(\alpha) = \left\{ \varphi'(\alpha) - \varphi'(\alpha) - \alpha\,\varphi''(\alpha)\,\frac{d\alpha}{dx} \right\}$$

$$= -\alpha\,\varphi''(\alpha)\,\frac{d\alpha}{dx}$$

De même

$$1 - p\,\psi'(\alpha) = -\alpha\,\psi''(\alpha)\,\frac{d\alpha}{dx}$$

Divisant membre à membre

$$\frac{1 - p\,\varphi'(\alpha)}{1 - p\,\psi'(\alpha)} = \frac{\varphi''(\alpha)}{\psi''(\alpha)}$$

D'où je tire

$$p = \lambda(\alpha)$$

Et évidemment j'aurai semblablement

$$q = \chi(\alpha)$$

par suite

$$p = \pi(q)$$

Équation générale qui contient encore une fonction arbitraire π. Différentiant encore j'aurai

$$\begin{cases} r = s\,\pi'(q) \\ s = t\,\pi'(q) \end{cases}$$

et par suite

$$rt - s^2 = 0$$

caractère analytique commun à toutes les surfaces développables.

Autre méthode. — La surface développable est telle que deux génératrices consécutives sont dans le même plan. Donc on peut la regarder comme le lieu des intersections successives d'un plan mobile qui se meut suivant une loi déterminée, pourvu qu'il ne reste qu'un paramètre arbitraire dans son équation. — Soit

$$z = \alpha + \beta x + \gamma y$$

l'éq. du plan. Imposons-lui par ex. la condition d'être normal à une courbe fixe. Son équation deviendra

$$(1) \qquad z = \alpha + x\,\varphi(\alpha) + y\,\psi(\alpha)$$

Et il en faut chercher l'enveloppe. En différentiant, j'ai

$$(2) \qquad 0 = 1 + x\,\varphi'(\alpha) + y\,\psi'(\alpha)$$

Les équations (1) et (2) donneront la surface par l'élimination de α. — Or elles donnent comme tout à l'heure

$$p = \pi(q)$$

et le calcul s'achève de même.

Surfaces Réglées quelconques.

Le cas le plus général est celui où une droite s'appuie constamment sur 3 directrices quelconques.

Les équations de la génératrice sont de la forme

$$y = \alpha x + \beta$$
$$z = \gamma x + \delta$$

Nous aurons avec cela trois équations de condition,

de façon qu'il reste

$$\begin{cases} y = \alpha x + \varphi(\alpha) & (1) \\ z = x\,\psi(\alpha) + \pi(\alpha) & (2) \end{cases}$$

Équations définitives de la Génératrice. Il y a trois fonctions arbitraires. Cependant, sans descendre au-delà du 3e. ordre, on parvient à les éliminer.

Voici la marche à suivre.

On différentie l'Éq. (1) successivement par rapport à x et à y. En divisant les résultats, on obtient

$$\alpha = -\frac{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)}{\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)} \qquad (m)$$

faisant de même pour l'Éq. (2), et ayant égard à l'Éq. (m), on obtient

$$p + q\alpha = \psi(\alpha) \qquad (3)$$

restent α et $\psi(\alpha)$ à éliminer.

Différentiant en x et y, divisant, et ayant égard à l'Éq. (m) on a

$$r + 2s\alpha + t\alpha^2 = 0 \qquad (4)$$

Reste α. Différentiant en x et y, et divisant, on obtient

$$-\alpha = \frac{u + 2\alpha.m + \alpha^2 v}{v + 2\alpha w + \alpha^2 u} \qquad (5)$$

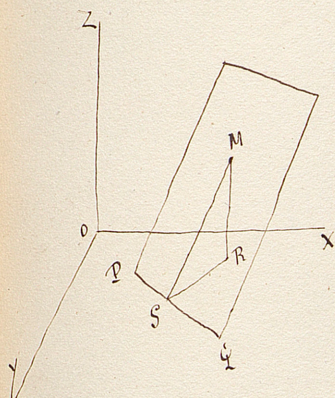
en posant

$$\frac{d^3z}{dx^3} = u \qquad \frac{d^3z}{dx^2dy} = m \qquad \frac{d^3z}{dx\,dy^2} = w \qquad \frac{d^3z}{dy^3} = v$$

Si maintenant on élimine α entre les Équations (4) et (5), l'Équation finale, qu'on ne peut

écrire simplement, serait l'équation cherchée.

Lignes de plus grande pente.



Soit PQ un plan tangent en M. abaissons MR perp. sur XOY, de R une perpendiculaire sur PQ. L'angle MSR est le plus grand de ceux que peut faire avec le plan XOY une ligne quelconque menée par M dans le plan PQ. Donc MS est la tangente à la ligne de plus grande pente. SR est la projection de la tangente MS. Donc c'est la tangente à la projection horizontale de la ligne de plus grande pente.

Cela posé, soient x, y, z les coordonnées du point M, et $x' y' z'$ les coord. courantes. L'Eq. du plan tangent est

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$$

faisant $z' = 0$, j'aurai

$$y' - y = -\frac{p}{q}(x' - x) - \frac{z}{q}$$

C'est l'Eq. de PQ. – D'autre part, l'Eq. de la tangente SR est

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x)$$

Ces deux droites sont rectangulaires. Donc

$$p\,dy - q\,dx = 0 \qquad (1)$$

convient aux lignes de plus grande pente. Si d'ailleurs l'Eq. de la surface est $f(x, y, z) = 0 \qquad (2)$

on voit que la Ligne de plus grande pente sera complètement déterminée.

Dans le cas particulier des Surfaces de Révolution, dont l'équation est

$$py - qx = 0$$

l'Eq. (1), c. à d.

$$pdy - qdx = 0$$

devient

$$xdy - ydx = 0$$

d'où

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$Ly = Lx + La \qquad a = \text{const}$$

$$Ly = Lax$$

$$y = ax$$

Donc les lignes de plus grande pente ont toujours pour projection sur xOy une droite passant à l'origine.

Lignes de Courbure.

Soient M et M' deux points voisins d'une Surface. Les normales en M et M' ne se rencontrent pas en Général. Les lignes qu'il faut suivre pour qu'elles se rencontrent sont les Lignes de Courbure.

Soit

$$z = f(x, y)$$

l'équation de la Surface, et posons toujours

$$\begin{cases} dz = p\,dx + q\,dy \\ dp = r\,dx + s\,dy \\ dq = s\,dx + t\,dy \end{cases}$$

Les Équations de la Normale en $M(x,y,z)$ sont

$$\begin{cases} x'-x + p(z'-z) = 0 \\ y'-y + q(z'-z) = 0 \end{cases}$$

Soient $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ les coordonnées de M', et supposons que la Normale en M' rencontre la précédente. — alors, en différentiant les 2 Équations précédentes, par rapport à x et y comme variables, on aura

$$\begin{cases} -dx - p\,dz + (z'-z)\,dp = 0 \\ -dy - q\,dz + (z'-z)\,dq = 0 \end{cases}$$

Ces 4 Équations doivent avoir lieu en même temps pour le point de Rencontre des deux Normales. — Éliminant $z'-z$ entre les deux dernières, on aura l'Équation de condition. Mais d'abord, remplaçons dz, dp et dq par leurs valeurs :

$$\begin{cases} -dx - p\,(p\,dx+q\,dy) + (z'-z)\,(r\,dx + s\,dy) = 0 \\ -dy - q\,(p\,dx+q\,dy) + (z'-z)\,(s\,dx + t\,dy) = 0 \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{cases} (1+p^2)\,dx + pq\,dy - (z'-z)\,(r\,dx+s\,dy) = 0 \\ (1+q^2)\,dy + pq\,dx - (z'-z)\,(s\,dx+t\,dy) = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\left\{(1+p^2)\,dx + pq\,dy\right\}(s\,dx + t\,dy) = \left\{(1+q^2)\,dy + pq\,dx\right\}(r\,dx+s\,dy)$$

Équation qui appartient aux lignes de Courbure, ou de

moins à leurs projections sur XOY. — Développant :

$$(c)\quad \{(1+p^2)s - pqr\}dx^2 + \{(1+p^2)t - (1+q^2)s\}dx\,dy + \{pqt - (1+q^2)s\}dy^2 = 0$$

Supposons qu'on ait résolu par rapport à $\frac{dy}{dx}$: nous aurons deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$, par exemple

$$\begin{cases} M\,dx + N\,dy = 0 \\ M_1\,dx + N_1\,dy = 0 \end{cases}$$

en intégrant, on trouve

$$\begin{cases} F = 0 \\ F_1 = 0 \end{cases}$$

et chacune, prise avec l'Éq. de la surface, donne une infinité de lignes de courbure, puisque F et F_1 renferment nécessairement des constantes arbitraires amenées par l'intégration. — Nous aurons ainsi deux systèmes de lignes de courbure.

Ces lignes se coupent toutes à angle droit, quand elles appartiennent à deux systèmes différents.

En effet : supposons pour un instant le plan XOY parallèle au plan tangent au point de rencontre A de deux lignes de courbure. alors $z' = z$, $p = q = 0$. Donc l'Éq. (c) devient

$$s\,dx^2 + (t - r)\,dx\,dy - s\,dy^2 = 0$$

ou

$$\frac{dy^2}{dx^2} - \frac{t-r}{s}\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

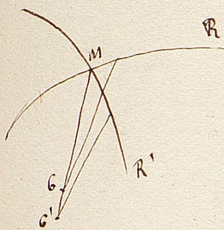
Donc les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ sont réelles et inverses au signe près : donc les projections des tangentes, et par suite les tangentes, donc les lignes de courbure, sont rectangulaires.

Donc

Une Surface quelconque étant donnée, on peut toujours la décomposer en une infinité de rectangles.

Déf.

Les Rayons de courbure de la Surface sont les longueurs des Normales comprises, entre le point M et la rencontre avec la Normale infiniment voisine menée le long d'une ligne de courbure. — Cherchons-les :



Soient x' y' z' les coordonnées de G ou de G'. Nous aurons (δ = MG)

$$\delta = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$$

ou bien

$$\delta^2 = (z'-z)^2\,(1+p^2+q^2),$$

car la normale étant perpendiculaire sur la courbe, on a par exemple $\frac{y'-y}{z'-z} = -\frac{dz}{dy} = -q$.

Pour avoir δ, écrivons ainsi les équations des projections des lignes de courbure

$$\left.\begin{aligned}&\{(1+p^2)-(z'-z)r\}\,dx + \{pq-(z'-z)s\}\,dy = 0\\ &\{pq-(z'-z)s\}\,dx + \{(1+q^2)-(z'-z)t\}\,dy = 0\end{aligned}\right\}$$

où $z'-z$ est la différence entre les z de la Normale et de la Surface, et tirons-en $z'-z$. En divisant pour éliminer dx et dy, on aura

$$\{(1+p^2)-(z'-z)r\}\{(1+q^2)-(z'-z)t\} - \{pq-(z'-z)s\}\{pq-(z'-z)s\} = 0$$

d'où

$$(z'-z)^2\,(rt-s^2) - (z'-z)\{(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs\} + p^2+q^2+1 = 0$$

au lieu de tirer de là les deux valeurs de $z'-z$, on peut

multiplier tout par $1+p^2+q^2$, et l'on aura l'Eq. en δ :

$$(rt-s^2)\,\delta^2 - \delta\sqrt{1+p^2+q^2}\left\{(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs\right\}+(1+p^2+q^2)^2=0$$

Les deux valeurs de δ sont les deux rayons de courbure de la surface.

Pour les surfaces développables, on a

$$rt-s^2=0$$

alors l'Eq. précédente a une racine infinie : et alors en effet, le long d'une génératrice, le plan tangent est le même. donc les normales sont toutes perpendiculaires à un même plan, et parallèles.

on voit donc ainsi que la génératrice rectiligne est une ligne de courbure, et que les deux rayons de courbure de la surface se réduisent à un seul.

Cherchons la surface développable formée par les normales qu'on peut mener le long d'une ligne de courbure.

Les Equations d'une normale sont

$$\begin{cases} x'-x+p\,(z'-z)=0 \\ y'-y+q\,(z'-z)=0 \end{cases}$$

on a d'ailleurs

$$z=f(x,y)$$

et aussi l'Equation de la ligne de courbure projetée sur xoy. Soit

$$F(x,y,a)=0$$

a étant une constante d'intégration. Si, entre ces 4 Equations on élimine x, y, z, on aura une Equation

$$\varphi(x',y',z',a)=0$$

qui sera l'Equation de la surface développable correspondante à chaque ligne de courbure.

Prenons pour exemple les surfaces de Révolution. L'Equation Générale est

$$z = f(x^2+y^2)$$

D'où

$$p = 2x \cdot f'$$

$$q = 2y \cdot f'$$

$$r = 4x^2 f'' + 2f'$$

$$s = 4xy f''$$

$$t = 4y^2 f'' + 2f'$$

En substituant dans l'équation générale des lignes de courbure, on trouve un facteur commun, qui est

$$f'' - 2f'^3$$

et il reste

$$xy\,dx^2 + (y^2-x^2)\,dx\,dy - xy\,dy^2 = 0$$

ou

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{x^2-y^2}{xy}\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

Donc

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} -\dfrac{x}{y} \\ \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

ainsi, pour les surfaces de Révolution, les Equations des lignes de courbure sont

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

D'où

$$y = ax$$

Et

$$y\,dy + x\,dx = 0$$

$$2y\,dy + 2x\,dx = 0$$

$$y^2 + x^2 = R^2$$

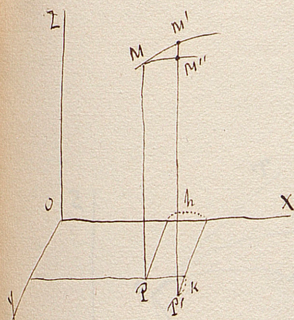
ainsi, il y a deux espèces de lignes de courbure : les méridiens dont la projection est $y = ax$, et les cercles parallèles, dont la projection est $y^2 + x^2 = R^2$: et il est facile de le démontrer à posteriori.

Courbure des Surfaces.

Pour étudier la courbure d'une surface, on ne peut, comme dans le cas des courbes, la comparer à celle d'une sphère osculatrice; car tout n'est pas symétrique autour de la normale.

Contact des Surfaces.

Soit M un point commun à deux surfaces. Soient h et k les accroissements de x et de y. L'ordonnée perp. à XOY en P' rencontrera la 1re surface en M' et la seconde en M''. Si M'M'' est un infiniment petit de l'ordre n+1, les deux surfaces sont dites avoir un contact d'ordre n.



Donc deux surfaces ont un contact du 1er. ordre lorsque, en donnant à x et y des accroissements infiniment petits, on trouve que la différence des ordonnées est du 2e. ordre.

Soient donc

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = \varphi(x, y) \end{cases}$$

les deux surfaces. On aura, comme $f = \varphi$ pour le z du point M,

$$M'M'' = h\left\{\frac{df}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}\right\} + k\left\{\frac{df}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\right\}$$

$$+ \frac{1}{1.2}\left\{h^2\left(\frac{d^2f}{dx^2} - \frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) + 2hk\left(\frac{d^2f}{dxdy} - \frac{d^2\varphi}{dxdy}\right) + k^2\left(\frac{d^2f}{dy^2} - \frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)\right\}$$

+ etc.

Pour que M'M'' soit du second ordre quels que soient h et k,

il faudra évidemment que

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dx} = \dfrac{d\varphi}{dx} \\ \dfrac{df}{dy} = \dfrac{d\varphi}{dy} \end{cases}$$

En Général, pour que le contact soit de l'ordre n, il faudra que toutes les dérivées partielles des n premiers ordres soient égales.

Supposons qu'on ait une surface parfaitement définie, et qu'une autre renferme des paramètres. On la rendra osculatrice en déterminant les paramètres de façon à rendre le contact de l'ordre le plus élevé possible.

Exemple. Plan Osculateur.

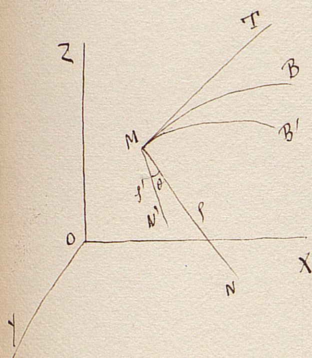
Soit
$$z = f(x, y)$$
l'Eq. de la surface, et
$$z' = \alpha x' + \beta y' + \gamma'$$
celle du plan. Elle pourra s'écrire
$$z' - z = \alpha(x' - x) + \beta(y' - y)$$
puisque le plan doit passer en $M(x, y, z)$. Alors
$$\frac{dz}{dx'} = \alpha \qquad \frac{dz}{dy'} = \beta$$
$$p = \frac{dz}{dx} = \alpha \qquad q = \frac{dz}{dy} = \beta$$
Donc l'Eq. du plan osculateur est
$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$$
C'est le plan Tangent.

Problème. Est-il possible de trouver une sphère osculatrice, qui ait partout un contact du 2e. ordre avec la surface ?

L'Eq. de la sphère contient 4 paramètres. or elle doit passer par un point de la surface, puis avoir un contact du 1er. ordre. Cela fait déjà 3 conditions. Pour que le contact s'élève au 2e. ordre, il y a encore 3 conditions à remplir : donc le problème n'est pas possible en général.

Cependant, il reste un paramètre. Il est évident qu'on pourrait en disposer de manière à rendre le contact du 2e. ordre dans une direction déterminée.

Il faut donc suivre une autre marche pour étudier la courbure des surfaces.



Soit M un point d'une surface, MN la normale. Menons un plan quelconque par la normale et une tangente MT. Si par MT on mène un autre plan, qui coupe la surface suivant MB', et si l'on appelle ρ et ρ' les deux rayons de courbure des sections planes MB et MB', je dis que

$$\rho' = \rho \cos\theta$$

θ étant l'angle des deux plans, ou, ce qui revient au même, celui de MN avec MN'.

Cherchons $\cos\theta$.

Le cosinus de l'angle de MN' avec OX est

$$\rho' \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}$$

Prenons s pour variable indépendante, et posons

$$\frac{dx}{ds} = x' \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = x'' \quad \text{etc.}$$

alors les Cosinus des angles de MN' avec les axes sont

$$MN' \left\{ \begin{array}{l} \rho' x'' \\ \rho' y'' \\ \rho' z'' \end{array} \right.$$

Pour MN : L'Eq. du plan Tangent étant

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$$

Nous aurons, pour les Cosinus de la Normale,

$$MN \left\{ \begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{-p}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}} \\ \cos\beta = \dfrac{-q}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}} \\ \cos\gamma = \dfrac{1}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}} \end{array} \right.$$

Donc

$$\cos\theta = \rho' \frac{-px'' - qy'' + z''}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

Maintenant, la tangente MT est dans le plan tangent à la surface. Donc

$$dz = pdx + qdy$$

d'où

$$\frac{dz}{ds} \text{ ou } z' = px' + qy'$$

en différentiant,

$$z'' = px'' + x'\left(\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}\right) + x'\left(\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{ds}\right)$$

$$+ qy'' + y'\left(\frac{dq}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}\right) + y'\left(\frac{dq}{dy}\cdot\frac{dy}{ds}\right)$$

$$z'' = px'' + rx'^2 + qy'' + ty'^2 + 2sx'y'$$

d'où

$$z'' - px'' - qy'' = rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2$$

Donc enfin

$$\cos\theta = \rho' \frac{rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

à présent, si l'on suppose que l'on fasse tourner autour de MT le plan TMB', le facteur qui multiplie ρ' resterait invariable, et ρ' changerait. Or, supposons que ce plan coïncide avec le plan TMB, alors $\cos\theta = 1$, et il vient, pour la section normale

$$\rho = \frac{\sqrt{p^2+q^2+1}}{rx'^2+2sx'y'+ty'^2}$$

Par suite, l'équation précédente devient

$$\cos\theta = \frac{\rho'}{\rho}$$

d'où

$$\rho' = \rho\cos\theta$$

Donc

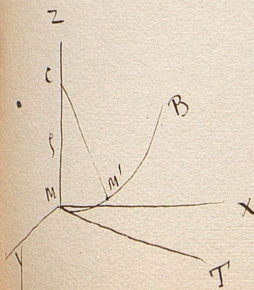
Théorème. _ Le rayon de courbure de toute section oblique est la projection, sur le plan de cette section, du rayon de courbure de la section normale qui passe par la même tangente.

On peut étendre au cas où MB' est une courbe gauche, en s'appuyant sur les propriétés du plan osculateur.

Transportons maintenant l'origine en M, et prenons pour axe des Z la normale elle-même, de sorte que le plan xoy est le plan tangent. _ Soit ρ le rayon de courbure de la section normale ZMT. Sa valeur devient alors

$$\rho = \frac{1}{rx'^2+2sx'y'+ty'^2}$$

C'est sous cette forme que nous l'étudierons.



Remarque. — Sous cette dernière forme

$$\rho = \frac{1}{rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2}$$

supposons que nous rétablissions le signe $\pm$. Or, le rayon de courbure est une quantité essentiellement positive, c'est une longueur.

Or, admettons que l'on prenne ρ positif quand la courbe est MB est au-dessus du plan tangent, c.a.d. quand ρ est dirigé dans le sens des axes Z positifs. Je dis qu'alors le dénominateur de ρ est positif. — En effet, en général on a trouvé

$$z'' = px'' + qy'' + rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2$$

Mais ici $p = q = 0$. Donc

$$z'' = \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds} = rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2$$

Donc

$$\rho = \frac{1}{\left(\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)}$$

Or le dénominateur est la dérivée du cosinus de l'angle de la tangente MT avec l'axe des Z. Ce cosinus est nul en M. Elevez-vous sur MB, il croît : donc sa dérivée est positive. De même dans le cas contraire.

Il résulte de là que, si l'on supprime le double signe, suivant qu'on trouvera pour ρ une valeur positive ou négative, cela voudra dire que la courbe MB sera au-dessus ou au-dessous du plan tangent ; — mieux : qu'elle sera concave ou convexe vers les Z positifs.

Soit maintenant

$$\text{angle } TMx = \alpha$$

alors on aura

$$\rho = \frac{1}{r\cos^2\alpha + 2s\sin\alpha\cos\alpha + t\sin^2\alpha}$$

ou bien

$$\rho = \frac{1}{\cos^2\alpha\{r + 2s\,\mathrm{Tg}\,\alpha + t\,\mathrm{Tg}^2\alpha\}}$$

$\cos^2\alpha$ est essentiellement positif. La quantité entre crochets est du 2^d. degré. Il y a donc 3 cas possibles. Supposons successivement

$$rt - s^2 > 0$$

$$rt - s^2 < 0$$

$$rt - s^2 = 0$$

Si $rt - s^2 > 0$, les racines sont imaginaires, c. àd. que quel que soit α, ρ conserve invariablement le même signe. Donc alors, toutes les sections normales sont, d'un même côté du plan tangent. On dit alors que la surface est convexe au point M.

Si $rt - s^2 < 0$, le trinome change deux fois de signe. Donc il y a pour MT deux directions telles que ρ passera du positif au négatif en devenant infini, et si MS et MS' sont ces deux directions, elles partageront l'espace en 2 régions, dans deux desquelles les sections normales seront au-dessus du plan tangent, et dans les deux autres au-dessous. — aux points de passage, suivant MS et MS', la courbure est nulle : le plan tangent a avec la surface un contact du 2^d. ordre.

Si enfin $rt - s^2 = 0$, le dénominateur passe par zéro

sans changer de signe : la surface est encore convexe : seulement il y a une direction limite pour laquelle la courbure est nulle. Cette condition est précisément remplie en tous les points d'une surface développable.

Voyons maintenant si f est susceptible d'un maximum ou d'un minimum. Je prends la dérivée du dénominateur et je l'égale à zéro. J'aurai

$$-r \cos\alpha \sin\alpha + s(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + t \sin\alpha \cos\alpha = 0$$

ou bien

$$2s \cos 2\alpha = (r-t) \sin 2\alpha$$

$$\operatorname{Tg} 2\alpha = \frac{2s}{r-t}$$

Il y a une valeur unique pour $\operatorname{Tang.} 2\alpha$. Donc l'angle 2α existe toujours. Combien y a-t-il de valeurs pour α? α ne peut varier que de $0°$ à $180°$. Si donc j'appelle $2\alpha'$ le plus petit arc positif qui répond à $\operatorname{Tg} 2\alpha = \frac{2s}{r-t}$, on aura $2\alpha'$ et $2\alpha' + \pi$. Donc les deux seules valeurs possibles de α sont α' et $\alpha' + \frac{\pi}{2}$. Ces deux directions sont à angle droit. Donc

Il existe deux directions rectangulaires pour lesquelles le rayon de courbure peut être maximum ou minimum.

L'est-il réellement ?

Revenons pour le savoir à la dérivée du dénominateur. Prenons la dérivée seconde. Elle sera

$$-4s \sin 2\alpha - 2(r-t) \cos 2\alpha$$

ou

$$-2 \cos 2\alpha \left\{ (r-t) + 2s \operatorname{Tg} 2\alpha \right\}$$

ou

$$-2 \cos 2\alpha \cdot \frac{(r-t)^2 + 4s^2}{r-t}$$

Si je change α en α' et en $\alpha' + \frac{\pi}{2}$, il est facile de voir que cette expression prend deux signes différents. Donc une des valeurs répond à un maximum, l'autre à un minimum.

Si cependant $r = t$, le raisonnement tombe en défaut ; mais alors la dérivée 1re est $2s \operatorname{Cos} 2\alpha$, et la conséquence est évidente.

Donc il y a bien deux sections rectangulaires pour lesquelles ρ est maximum et minimum.

Prenons les pour axes des x et des y. Une des valeurs de $\operatorname{Tg} 2\alpha$ doit être nulle. Donc $s = 0$. Donc la valeur de ρ peut s'écrire :

$$\rho = \frac{1}{r \operatorname{Cos}^2\alpha + t \operatorname{Sin}^2\alpha}$$

et alors ρ devient maximum ou minimum selon que $\operatorname{Sin}\alpha = 0$ ou $\operatorname{Cos}\alpha = 0$. — Dans ces deux cas, on a

$$R_1 = \frac{1}{r}$$

$$R_2 = \frac{1}{t}$$

R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux : et l'on pourra écrire

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1} \operatorname{Cos}^2\alpha + \frac{1}{R_2} \operatorname{Sin}^2\alpha.$$

Remarque Importante.

Supposons pour un instant qu'au lieu de chercher la valeur de $\operatorname{Tg} 2\alpha$, nous ayons pris l'Eq. en $\operatorname{Tg}\alpha$. L'Eq. était (p. 182)

$$-r\cos\alpha\sin\alpha + s(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + t\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

ou bien

$$-r\,\mathrm{Tg}\,\alpha + s - s\,\mathrm{Tg}^2\alpha + t\,\mathrm{Tg}\,\alpha = 0$$

ou encore

$$\mathrm{Tg}^2\alpha - \frac{t-r}{s}\mathrm{Tg}\,\alpha - 1 = 0$$

or cette Equation est précisément la même que celle qui nous avait donné (p. 170) les deux directions des tangentes aux lignes de courbure.

Donc :

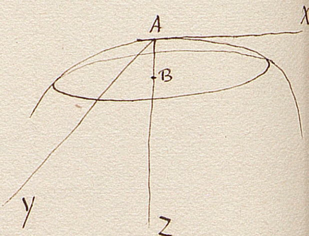
Les Lignes de Courbure des Surfaces sont celles où les rayons de courbure sont maximum et minimum.

V. les compléments p. 492.

Je place ici, comme Complément de l'Etude d'une Surface autour d'un point, un Théorème fort Important donné par Mr. Bertrand.

Théorème. –

Quelle que soit une Surface, si A est un point de cette Surface, B un point de la Normale, si en B on fait une section plane parallèle au plan Tangent: la courbe de section, dont les dimensions diminuent de plus en plus en même temps que AB, s'approche indéfiniment d'être semblable à une section conique.



Prenons pour plan des xy le plan Tangent en A, et pour axe des z la Normale. Soit

$$z = f(x, y)$$

l'Eq. de la Surface. Elle est évidemment satisfaite pour $x=0,\ y=0,\ z=0$: et de plus on a alors $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} = 0$.

Quelle est l'Équation de la Section faite par B ? Évidemment

AB = λ

$$\lambda = \varphi(x,y)$$

et de plus, cette Équation représente la Section en véritable Grandeur.

Développant :

$$\lambda = \varphi(0,0) + x\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 + y\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_0 + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_0 + \frac{y^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)_0 + xy\left(\frac{d^2\varphi}{dxdy}\right)_0 + R$$

R renfermant des termes du 3e. degré et plus en x et y.

Les 3 premiers termes du 2e. membre sont rigoureusement nuls. Quant aux coefficients suivants, ce sont des constantes. Donc

$$\lambda = ax^2 + bxy + cy^2 + R$$

Si λ tend vers zéro, la courbe tend vers un point. – Mais, pour en suivre la forme, imaginons une courbe semblable. Posons

$$\begin{cases} x = \dfrac{x'}{m} \\ y = \dfrac{y'}{m} \end{cases}$$

L'Équation de la courbe semblable sera

$$m^2\lambda = ax'^2 + bx'y' + cy'^2 + R_1 m^2$$

Je suppose que m augmente de manière que $m^2\lambda$ ait une valeur constante C. alors

$$C = ax'^2 + bx'y' + cy'^2 + R_1 m^2$$

or je dis que $R_1 m^2$ tend indéfiniment vers zéro : cela tient à ce que R. étant du 3e degré en x et y, contient au moins m^3 en dénominateur dans tous ses termes.

Donc l'Équation tend vers :

$$C = ax'^2 + bx'y' + cy'^2$$

Eq. d'une Section Conique. c.q.f.d.

Corollaire. — Une surface qui jouit de la propriété que toutes ses sections parallèles sont des courbes semblables, aura, pour toutes ces sections, des courbes du second degré. Donc ce ne peut être qu'une surface du 2^d. degré.

Calcul Intégral.

Notes.

Mlle.

Intégrations Immédiates.

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

Cette formule est générale. — Cependant, si $m=-1$, on aurait

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{0} + C$$

forme illusoire. Cependant, on sait que $d.Lx = \frac{dx}{x}$, donc $\int \frac{dx}{x} = Lx + C$. — or on peut écrire

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}-1}{m+1} + C_1$$

Si $m=-1$, $\frac{x^{m+1}-1}{m+1}$ devient $\frac{0}{0}$. or la vraie valeur est Lx. donc

$$\int \frac{dx}{x} = Lx + C = LCx$$

on peut faire autrement. — Posons $m=-1+h$, et faisons tendre h vers zéro. Nous aurons

$$\int \frac{dx}{x^{1-h}} = \frac{x^h}{h} + C$$

reste à trouver $\text{Lim.}\ \frac{x^h}{h}$. Développons x^h.

$$x^h = e^{hLx} = 1 + \frac{hLx}{1} + \frac{h^2(Lx)^2}{1.2} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{hLx}{1} + Mh^2,$$

Donc

$$\int \frac{dx}{x^{1-h}} = \frac{1}{h} + C + Lx + Mh$$

$$= C' + Lx + Mh$$

Si h tend vers zéro, il vient à la limite

$$\int \frac{dx}{x} = Lx + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{La} + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C$$

---

etc.

Quelquefois l'intégration devient immédiate par un changement de variable.

Soit

$$y = \int (ax^m + b) x^{m-1} dx$$

Posons

$$ax^m + b = z$$

$$max^{m-1} dx = dz$$

$$dx = \frac{dz}{max^{m-1}}$$

$$x^{m-1} dx = \frac{dz}{ma}$$

Donc

$$y = \int \frac{z\,dz}{ma} = \frac{1}{ma}\int z\,dz = \frac{1}{2ma}\left(ax^m+b\right)^2 + C$$

De même

$$\int \left(ax^m+b\right)^n x^{m-1}dx = \frac{1}{(n+1)ma}\left(ax^m+b\right)^{n+1} + C$$

Soit

$$y = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4-1}}$$

On pose

$$x^4 - 1 = z$$

$$4x^3dx = dz$$

$$x^3dx = \frac{dz}{4}$$

$$y = \frac{1}{4}\int\frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{2}\sqrt{z} + C = \frac{1}{2}\sqrt{x^4-1} + C$$

Soit

$$y = \int\frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

Posons

$$x - \alpha = \beta z$$

$$dx = \beta\,dz$$

$$y = \int\frac{\beta\,dz}{\beta^2(1+z^2)} = \frac{1}{\beta}\int\frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{\beta}\operatorname{arc\,tg} z + C = \frac{1}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\alpha}{\beta} + C$$

En Général :

$$y = \int f\left(a\,\varphi(x)\right)\varphi'(x)\,dx$$

On posera

$$a\,\varphi(x) = z$$

D'où

$$\varphi'(x)\,dx = \frac{1}{a}\,dz$$

et

$$y = \int \frac{f(z)\,dz}{a}$$

et si l'on sait intégrer $f(z)\,dz$, on saura trouver y.

Intégration par Décomposition.

Décomposition des Fractions Rationnelles en Fractions Simples.

On sait que si l'on a une somme de fractions

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \cdots + \frac{L}{x-l}$$

et si on les ajoutait, on aurait une fraction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ dans laquelle $\varphi(x)$ serait d'un degré moindre que le dénominateur $f(x)$.

Réciproquement, si l'on a la fraction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, on peut se proposer de la décomposer ainsi, $\varphi(x)$ étant au plus du degré $m-1$, ce qu'on peut toujours supposer. – On peut aussi toujours admettre que la fraction est irréductible, et que le coefficient de la plus haute puissance de x, dans $f(x)$, est l'unité.

Comment peut-on effectuer la décomposition ?

Il y a deux cas.

Premier cas. – Le dénominateur $f(x)$ n'a que des racines égales.

Posons l'identité

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{L}{x-l} \quad (1)$$

ou bien

$$\varphi(x) = A\frac{f(x)}{x-a} + B\frac{f(x)}{x-b} + \dots + L\frac{f(x)}{x-l} \quad (2)$$

Si je fais $x=a$, l'identité subsiste encore, et devient

$$\varphi(a) = A \lim\left(\frac{f(x)}{x-a}\right)_{x=a}$$

$$= A f'(a)$$

Donc

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)}$$

De même

$$B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)}$$

$$L = \frac{\varphi(l)}{f'(l)}$$

Reste à savoir si l'on obtiendra bien une identité en reportant ces valeurs dans l'équation (2). — or je sais déjà qu'en les reportant dans (2), cette équation serait satisfaite pour les m valeurs de x : $a, b, c, \dots l$. Or l'éq. (2) est au plus du degré $m-1$. Donc cette équation est bien identique, et la méthode est ainsi rigoureusement justifiée.

Deuxième Cas. —

Supposons maintenant $f(x) = (x-a)^n \psi_1(x)$

alors posons

$$(1)\quad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-2}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{f_1(x)}{\psi(x)}$$

ou bien

$$(2)\quad \varphi(x) = \left\{\frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-2}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{x-a}\right\} f(x) + (x-a)^n f_1(x)$$

Cela doit être une identité. Or, on peut l'écrire :

$$(3)\quad \varphi(x) - \left\{\frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{x-a}\right\} f(x) = (x-a)^n f_1(x)$$

Le 1er membre doit être divisible par $(x-a)^n$, puisque le second l'est.

Posons

$$\varphi(x) = \varphi(a) + (x-a)\varphi'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}\varphi''(a) + \cdots$$

$$f(x) = \frac{(x-a)^n}{1.2..n} f^n(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{1.2..(n+1)} f^{n+1}(a) + \cdots$$

Égalons à zéro les coefficients des diverses puissances de $x-a$ quand on aura reporté ces valeurs dans la dernière égalité. Il viendra

$$\varphi(a) - A\frac{f^n(a)}{1.2..n} = 0 \quad \left\{\begin{array}{l}A \text{ est essentiellement fini}\\ \text{et différent de zéro.}\end{array}\right.$$

$$\varphi'(a) - A\frac{f^{n+1}(a)}{1.2..(n+1)} - A_1\frac{f^n(a)}{1.2..n} = 0 \quad \left\{\begin{array}{l}A_1 \text{ peut être nul, mais}\\ \text{non pas infini.}\end{array}\right.$$

$$\frac{\varphi''(a)}{1.2} - A\frac{f^{n+2}(a)}{1.2..(n+2)} - A_1\frac{f^{n+1}(a)}{1.2..(n+1)} - A_2\frac{f^n(a)}{1.2..n} = 0$$

.....

$$\frac{\varphi^{n-1}(a)}{1.2..(n-1)} - A\frac{f^{2n-1}(a)}{1.2..(2n-1)} - \cdots - A_{n-1}\frac{f^n(a)}{1.2..n} = 0$$

Maintenant, on peut répéter le même raisonnement sur $\frac{f_1(x)}{\psi(x)}$: car d'abord elle est irréductible, autrement le degré de son dénominateur s'abaisserait, et, en réduisant au même dénominateur, on ne retrouverait plus $f(x)$. — or il est inutile de faire de nouveaux raisonnements : car on remarque que les calculs à faire relativement à la racine b sont absolument les mêmes que pour la racine a. Donc les précédents peuvent servir avec quelques légers changements.

Reste à montrer que l'équation (2) devient une identité quand on y remplace $A, A_1 ..$ par leurs valeurs ainsi déterminées. — or, d'après la méthode, il arrivera que le premier membre aura nécessairement cette forme

$$P(x-a)^n + Q(x-a)^{n+1} + R(x-a)^{n+2} + ..$$

de sorte qu'on pourra l'identifier à un polynôme donné

$$(x-a)^n f_1(x)$$

et calculer $f_1(x)$ de façon que l'Eq. (2) devienne une identité.

On peut donner une autre forme au calcul.

au lieu d'introduire les dérivées de $f(x)$, on peut introduire celles de $\psi_1(x)$. car, posons toujours

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n\psi_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{f_1(x)}{\psi_1(x)}$$

d'où

$$\varphi(x) - A\psi_1(x) - A_1(x-a)\psi_1(x) - \cdots - A_{n-1}(x-a)^{n-1}\psi_1(x) = (x-a)^n f_1(x)$$

Le 1er membre doit être divisible par $(x-a)^n$. or

$$\psi_1(x) = \psi_1(a) + (x-a)\psi_1'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}\psi_1''(a) + \cdots$$

de sorte qu'on trouve les nouvelles équations :

$$\varphi(a) - A\,\psi_1(a) = 0$$

$$\varphi'(a) - A\,\psi_1'(a) - A_1\,\psi_1(a) = 0$$

$$\frac{\varphi''(a)}{1.2} - A\,\frac{\psi_1''(a)}{1.2} - A_1\,\psi_1'(a) - A_2\,\psi_1(a) = 0$$

etc.

Cette forme est plus simple, et préférable toutes les fois que des calculs antérieurs auront obligé à chercher la fonction $\psi_1(x)$.

Il y a des cas où le calcul se simplifie. Soit

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n}$$

alors, posant $\varphi(x) = \varphi(a + \overline{x-a})$ et développant, on a immédiatement, si n' est le degré de $\varphi(x)$,

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n} = \frac{\varphi(a)}{(x-a)^n} + \frac{\varphi'(a)}{(x-a)^{n-1}} + \frac{\frac{1}{1.2}\varphi''(a)}{(x-a)^{n-2}} + \dots + \frac{\frac{1}{1.2\dots n'}\varphi^{n'}(a)}{(x-a)^{n-n'}}$$

Rem. — La décomposition n'est possible que d'une seule manière. Car autrement, on aurait

$$E(x) + \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{B}{(x-a)^{n-1}} + \dots = E_1(x) + \frac{A_1}{(x-a)^{n_1}} + \dots$$

Je dis d'abord que $n = n_1$. Car, si $n > n_1$, on aurait un résultat de la forme

$$\frac{A}{(x-a)^n} = \frac{B}{K(x-a)^{n-1}} + \dots$$

égalité impossible. Donc $n = n_1$. Maintenant, $A_1 = A$. De même, chaque fraction du 1[er] membre a son égale dans le second. Restent les entiers, qui doivent être identiques. (voir, alg. de Bertrand).

Enfin, on peut examiner le cas des Racines Imaginaires:

$$\begin{cases} \alpha + \beta\sqrt{-1} \\ \alpha - \beta\sqrt{-1} \end{cases}$$

En raisonnant de même, on trouvera

$$\frac{N}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad \frac{N'}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}$$

or on a

$$N = \frac{\varphi(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{f'(\alpha+\beta\sqrt{-1})} = G + H\sqrt{-1}$$

$$N' = \frac{\varphi(\alpha-\beta\sqrt{-1})}{f'(\alpha-\beta\sqrt{-1})} = G - H\sqrt{-1}$$

alors la somme des deux fractions devient

$$\frac{2G(x-\alpha) - 2H\beta}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}$$

résultat de la forme

$$\frac{Px + Q}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

S'il y a des Racines Imaginaires égales, on aura

$$\frac{M + N\sqrt{-1}}{(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})^n} \quad \text{avec} \quad \frac{M - N\sqrt{-1}}{(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})^n}$$

La somme sera encore réelle. Car, posons

$$x - \alpha \pm \beta\sqrt{-1} = \rho\left(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi\right)$$

$$\begin{cases} \rho^2 = (x-\alpha)^2 + \beta^2 \\ \cos\varphi = \dfrac{x-\alpha}{\rho} \\ \sin\varphi = \dfrac{\beta}{\rho} \end{cases}$$

alors les deux fractions prennent la forme

$$\frac{M+N\sqrt{-1}}{\rho^n\{\cos n\varphi+\sqrt{-1}\sin n\varphi\}} \quad \text{et} \quad \frac{M-N\sqrt{-1}}{\rho^n\{\cos n\varphi-\sqrt{-1}\sin n\varphi\}}$$

et l'on retombe sur le cas précédent. Donc la somme est réelle. Seulement, on ne voit pas de formule générale qui donne cette somme.

Mais cherchons à développer ainsi :

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{Ax+B}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^n} + \cdots + \frac{A_{n-1}x+B_{n-1}}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}} + \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$$

ou

$$\varphi(x) - (Ax+B)\psi_1(x) - \cdots - (A_{n-1}x+B_{n-1})\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^{n-1}\psi_1(x) = \{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^n\varphi_1(x)$$

Le 1er. membre doit être divisible exactement par $\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^n$. Il doit donc avoir n racines égales à $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$. Donc le 1er. membre et ses $n-1$ 1ères dérivées doivent être nulles pour $x=\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$. on aura d'abord

$$\varphi(\alpha+\beta\sqrt{-1}) - \{A(\alpha+\beta\sqrt{-1})+B\}\psi_1(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = 0$$

Posons

$$\frac{\varphi(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{\psi_1(\alpha+\beta\sqrt{-1})} = M+N\sqrt{-1}$$

M et N ne pouvant être nuls simultanément : — l'équation devient

$$A\alpha+B+A\beta\sqrt{-1} = M+N\sqrt{-1}$$

d'où

$$\begin{cases} A\alpha+B = M \\ A\beta = N \end{cases}$$

Deux équations dont on peut tirer A et B. — De même, chaque équation se dédoublera en deux autres, qui donneront les coefficients cherchés.

Ces deux premières équations donnent

$$A = \frac{N}{\beta}$$

$$B = M - \frac{N\alpha}{\beta}$$

A et B ne sont donc pas nuls simultanément, non plus qu'infinis, car $\beta \neq 0$, autrement on rentrerait dans le cas des racines réelles.

on verrait de même que A_1 et B_1, A_2 et B_2, ... peuvent être nuls simultanément, et jamais infinis.

Passons à l'intégration de ces différents résultats.

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\int\frac{dx}{x-a} = A\,\mathcal{L}(x-a) + \mathcal{L}C = \mathcal{L}.C(x-a)^A$$

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n}dx = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$$

$$\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \int\frac{A(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + (A\alpha+B)\int\frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$= \frac{A}{2}\mathcal{L}\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right) + (A\alpha+B)\int\frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

Mais

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \int\frac{\frac{dx}{\beta^2}}{1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2} = \frac{1}{\beta}\int\frac{\frac{dx}{\beta}}{1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2} = \frac{1}{\beta}\,\text{arc}\,\text{tg}\,\frac{x-\alpha}{\beta}$$

Donc

$$\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{A}{2}\mathcal{L}\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right) + \frac{A\alpha+B}{\beta}\,\text{arc}\,\text{tg}\,\frac{x-\alpha}{\beta}$$



$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^n} = \int \frac{A(x-\alpha)\,dx}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}} + (A\alpha+B)\int \frac{dx}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^n}$$

$$= -\frac{A}{2(n-1)\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^{n-1}} + (A\alpha+B)\int \frac{dx}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^n}$$

Posons

$$x-\alpha = \beta z \qquad y = \int \frac{dx}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^n}$$

alors

$$y = \int \frac{\beta\,dz}{\beta^{2n}(z^2+1)^n} = \frac{1}{\beta^{2n-1}}\int \frac{dz}{(z^2+1)^n}$$

appuyons-nous ici sur une méthode nouvelle d'intégration, l'Intégration par parties. — on a

$$d.\,uv = u\,dv + v\,du$$

d'où

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

Donc

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

d'où résulte la méthode qui consiste simplement dans l'application de cette formule. — Cette méthode est une des plus fécondes du calcul Intégral.

on aura ici

$$Y = \int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \int \left\{ \frac{z^2+1}{(z^2+1)^n} - \frac{z^2}{(z^2+1)^n} \right\} dz = \int \left\{ \frac{1}{(z^2+1)^{n-1}} - \frac{z^2}{(z^2+1)^n} \right\} dz$$

$$Y = \int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}} - \int \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^n}$$

Mais

$$\int \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^n} = \int z \cdot \frac{z\,dz}{(z^2+1)^n} = \frac{-z}{2(n-1)(z^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2n-1}\int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}$$

Donc

$$Y = \int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \frac{z}{2(n-1)(z^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}$$

Maintenant, opérant de même sur la dernière intégrale, on aura

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}} = \frac{z}{(2n-4)(z^2+1)^{n-2}} + \frac{2n-5}{2n-4} \int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-2}}$$

et ainsi de suite ; enfin, pour $n = 2$

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^2+1}$$

$$= \frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} z + C$$

Multipliant la 2de. Équation par $\frac{2n-3}{2n-2}$, la 3e. par $\frac{2n-5}{2n-4} \cdot \frac{2n-3}{2n-2}$, etc. et ajoutant, on aura

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \begin{cases} \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{z}{(z^2+1)^{n-1}} \\ + \frac{2n-3}{(2n-2)(2n-4)} \cdot \frac{z}{(z^2+1)^{n-2}} \\ + \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-2)(2n-4)(2n-6)} \cdot \frac{z}{(z^2+1)^{n-3}} \\ + \cdots \\ + \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3}{(2n-2)(2n-4)\cdots 2} \cdot \frac{z}{z^2+1} \\ + \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3}{(2n-2)(2n-4)\cdots 2} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} z + C \end{cases}$$

Delà Y et par suite y.

Applications.

Soit
$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{3x^2-4x+2}{x^3-3x^2+3x-1}$$

on a $x^3-3x^2+3x-1 = (x-1)^3$. D'ailleurs, $x=1$ n'annule pas le numérateur. — Or on a

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n} = \frac{f(a)}{(x-a)^n} + \frac{f'(a)}{(x-a)^{n-1}} + \frac{f''(a)}{1.2\,(x-a)^{n-2}} + \cdots$$

Donc ici
$$f(1) = 1$$
$$f'(1) = 2$$
$$\frac{f''(1)}{1.2} = 3$$

et
$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1}$$

Cherchons $\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}dx$. On a

$$\int \frac{dx}{(x-1)^3} = -\frac{1}{2(x-1)^2}$$

$$\int \frac{2dx}{(x-1)^2} = -\frac{2}{x-1}$$

$$\int \frac{3dx}{x-1} = 3\,\mathcal{L}(x-1)$$

Donc
$$\int \frac{f(x)\,dx}{\varphi(x)} = 3\,\mathcal{L}(x-1) - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C$$

Soit encore
$$\int \frac{dx}{x^3-1}$$

on a
$$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

Donc

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

or

$$A = \frac{f(a)}{\varphi'(a)} = \frac{1}{3}$$

Reste donc

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3(x-1)} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

D'où

$$3 - (x^2+x+1) - 3(x-1)(Bx+C) = 0$$

$$x^2(3B+1) - x(3B-3C-1) - 3C-2 = 0$$

D'où

$$B = -\frac{1}{3}$$

$$C = -\frac{2}{3}$$

Donc

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1}\right\}$$

or

$$\int\frac{dx}{x-1} = \mathcal{L}(x-1)$$

$$\int\frac{(x+2)dx}{x^2+x+1} = \int\frac{(x+2)dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \int\frac{(x+\frac{1}{2})dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} + \int\frac{\frac{3}{2}dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}\right\} + \frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arc}\operatorname{Tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Donc

$$\int\frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\mathcal{L}(x-1) - \frac{1}{6}\mathcal{L}(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc}\operatorname{Tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

On sait que l'on a

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc}\,\text{tg}\,x + C$$

Si l'on prenait la forme donnée pour les racines réelles, on aurait

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{A}{x-\sqrt{-1}} + \frac{B}{x+\sqrt{-1}}$$

$$A = \frac{1}{2\sqrt{-1}}$$

$$B = \frac{1}{-2\sqrt{-1}}$$

Donc

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{1}{x-\sqrt{-1}} - \frac{1}{x+\sqrt{-1}}\right)$$

Intégrant

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{ \mathcal{L}(x-\sqrt{-1}) - \mathcal{L}(x+\sqrt{-1}) \right\} + C'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, \mathcal{L}\, \frac{x-\sqrt{-1}}{x+\sqrt{-1}} + C'$$

autre expression bien différente. — On a donc

$$\text{arc}\,\text{tg}\,x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, \mathcal{L}\, \frac{x-\sqrt{-1}}{x+\sqrt{-1}} + C$$

On peut trouver la valeur de C en faisant $x=0$, ce qui donne

$$0 = \mathcal{L}(-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{-1}} + C$$

Donc

$$\text{arc}\,\text{tg}\,x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{ \mathcal{L}\, \frac{x-\sqrt{-1}}{x+\sqrt{-1}} - \mathcal{L}(-1) \right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, \mathcal{L}\, \frac{x-\sqrt{-1}}{-x-\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, \mathcal{L}\, \frac{\sqrt{-1}-x}{x+\sqrt{-1}}$$

Soit encore $y = \int \frac{dx}{x^4-1}$.

on a $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$

Donc

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$A = \frac{\varphi(1)}{f'(1)} \qquad B = \frac{\varphi(-1)}{f'(-1)}$$

$$A = \frac{1}{4} \qquad B = -\frac{1}{4}$$

Posons ensuite, pour trouver C et D,

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{f_1(x)}{x^2-1}$$

$$1 - (Cx+D)(x^2-1) = (x^2+1) f_1(x)$$

Le 1er. membre doit être divisible par x^2+1. Donc, si l'on substitue dans ce 1er. membre $\sqrt{-1}$ ou $-\sqrt{-1}$, il doit être nul identiquement. Donc

$$1 - (C\sqrt{-1} + D)(-1-1) = 0$$

$$1 - 2(C\sqrt{-1} + D) = 0$$

$$\begin{cases} 1 + 2D = 0 \\ C = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} C = 0 \\ D = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}$$

Donc

$$\int \frac{dx}{x^4-1} = \mathcal{L}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \mathcal{L}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C$$

---

ou enfin

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \mathcal{L} \frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}$$

Cette formule aurait pu être trouvée autrement. Car on a

$$\begin{cases} e^{z\sqrt{-1}} = \cos z + \sqrt{-1}\sin z \\ e^{-z\sqrt{-1}} = \cos z - \sqrt{-1}\sin z \end{cases}$$

D'où

$$e^{2z\sqrt{-1}} = \frac{\cos z + \sqrt{-1}\sin z}{\cos z - \sqrt{-1}\sin z}$$

$$= \frac{1+\sqrt{-1}\operatorname{tg} z}{1-\sqrt{-1}\operatorname{tg} z}$$

Posons $\operatorname{tg} z = x$. alors

$$e^{2z\sqrt{-1}} = \frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}$$

$$2z\sqrt{-1} = \mathcal{L}\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}$$

$$2\sqrt{-1}\operatorname{arc\,tg} x = \mathcal{L}\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}$$

C'est la même formule que tout-à-l'heure.

Soit encore

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int\left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}\right)dx = -\frac{1}{2}\left\{\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x-1}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\mathcal{L}(x+1) - \mathcal{L}(x-1)\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\frac{x-1}{x+1} + C$$

ou bien

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{4}\mathcal{L}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + C$$

Intégration des Fonctions Irrationnelles.

Soit

$$y = \int \frac{\sqrt[3]{x^2} + x - \sqrt[2]{x^3}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x^2}} dx$$

on a

$$y = \int \frac{x^{\frac{2}{3}} + x - x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{2}{3}}} dx = \int \frac{x^{\frac{8}{12}} + x^{\frac{12}{12}} - x^{\frac{18}{12}}}{x^{\frac{3}{12}} - x^{\frac{8}{12}}} dx$$

Posons $x = t^{12}$ d'où $dx = t^{11} dt$. Il viendra

$$y = 12 \int \frac{t^5 + t^9 - t^{15}}{1 - t^5} t^{11} dt$$

on retombe dans le cas précédent.

On voit que ce mode de transformation réussira toutes les fois que l'on n'aura ainsi que des Irrationnelles monômes.

La difficulté commence quand les Irrationnelles portent sur des Polynômes.

Le procédé Général d'Intégration est celui-ci :

Changer de variable de manière à rendre Rationnelle la quantité proposée.

Cela fait, on retombe sur le cas précédent.

1°.

$$y = \int f(x, \sqrt{a + bx})\, dx$$

Posons
$$a+bx = z^2$$
$$x = \frac{z^2-a}{b}$$
$$dx = \frac{2z\,dz}{b}$$
donc
$$y = \int \frac{2z}{b} f\left(\frac{z^2-a}{b}, z\right) dz$$
ce qui pourra s'intégrer, si f est une fonction Rationnelle.

2°. Plus Généralement :
$$y = \int f\left(x, (a+bx)^{\frac{p}{q}}, (a+bx)^{\frac{p'}{q'}}, \dots\right) dx$$
cela peut s'écrire
$$y = \int f\left(x, (a+bx)^{\frac{m}{D}}, (a+bx)^{\frac{n}{D}}, \dots\right) dx$$
Posant
$$a+bx = z^D$$
$$x = \frac{z^D-a}{b}$$
$$dx = \frac{Dz^{D-1}dz}{b}$$
et substituant, on aura sous le signe $\int$ une fonction de z entièrement rationnelle.

On rencontre aussi des expressions de la forme
$$y = \int f\left(x, \sqrt{a+bx}, \sqrt{a'+b'x}\right) dx$$
Posons encore
$$a+bx = z^2 \quad x = \frac{z^2-a}{b} \quad dx = \frac{2z\,dz}{b}$$

Si l'on substitue, il vient

$$y = \int \varphi\left(z, \sqrt{A+Bz^2}\right) dz$$

et il ne reste plus qu'un seul radical portant sur une quantité du second degré.

Il y a alors une méthode générale.

Soit en effet :

$$y = \int f\left(x, \sqrt{a+bx+cx^2}\right) dx$$

D'abord, il est facile de voir qu'on peut toujours ramener y à l'une de ces formes

$$y = \int \frac{X\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \qquad y = \int X\,dx \sqrt{a+bx+cx^2}$$

En effet, la fonction f est nécessairement de la forme

$$\frac{A + B\sqrt{a+bx+cx^2}}{A_1 + B_1\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

Multipliant haut et bas par $A_1 - B_1\sqrt{a+bx+cx^2}$, on a

$$\frac{P + Q\sqrt{a+bx+cx^2}}{D} = \frac{P}{D} + \frac{Q}{D}\sqrt{a+bx+cx^2}$$

c'est bien ce que nous disions : et si l'on multiplie et divise par le radical, il passe au dénominateur, ce qui est souvent plus commode.

Reprenons $\quad y = \int f\left(x, \sqrt{a+bx+cx^2}\right) dx$

Si $c > 0$, on peut le faire sortir du radical : et

et prendre seulement

$$y = \int f(x, \sqrt{a+bx+x^2})\,dx$$

Posons

$$\sqrt{a+bx+x^2} = z - x$$

$$a+bx = z^2 - 2zx$$

$$x = \frac{z^2-a}{b+2z}$$

$$b\,dx = 2z\,dz - 2x\,dz - 2z\,dx$$

$$dx = \frac{2(z-x)\,dz}{b+2z}$$

$$y = \int f\left(\frac{z^2-a}{b+2z},\ z - \frac{z^2-a}{b+2z}\right) \cdot \frac{2\left(z - \frac{z^2-a}{b+2z}\right)}{b+2z}\,dz$$

et le problème est ainsi résolu.

appliquons cette méthode à l'intégrale

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+x^2}}$$

$$\sqrt{a+2bx+x^2} = z - x$$

$$a+2bx = z^2 - 2zx$$

$$b\,dx = x\,dz - z\,dx - x\,dz$$

$$(b+z)\,dx = (z-x)\,dz$$

$$\frac{dx}{z-x} = \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+x^2}} = \frac{dz}{b+z}$$

Donc

$$y = \int \frac{dz}{b+z} = \mathcal{L}(b+z) + C = \mathcal{L}\left\{b+x+\sqrt{a+2bx+x^2}\right\} + C$$

Si $b=0$ et $a=1$, il reste

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \mathcal{L}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C$$

Rem. – Il est clair qu'au lieu de poser

$$\sqrt{a+bx+x^2} = z - x$$

on pourrait poser

$$\sqrt{a+bx+x^2} = z + x$$

Si x^2 avait un coefficient c, on prendrait

$$\sqrt{a+bx+cx^2} = z \pm x\sqrt{c}$$

Si l'on avait

$$y = \int \frac{(px+q)\,dx}{\sqrt{a+2bx+x^2}}$$

on introduirait au numérateur la différentielle exacte de la quantité sous le radical. On aurait

$$y = \int \frac{p(x+b)\,dx}{\sqrt{a+2bx+x^2}} + \int \frac{(q-pb)\,dx}{\sqrt{a+2bx+x^2}}$$

$$y = p\sqrt{a+2bx+x^2} + (q-pb)\,\mathcal{L}\left(b+x+\sqrt{a+2bx+x^2}\right) + C$$

Nous avons trouvé, en le déduisant d'une formule plus générale,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \mathcal{L}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C$$

on pourrait aussi, en intégrant directement, trouver d'autres résultats qui reviendraient à celui-là. – Si l'on pose $\sqrt{1+x^2} = z - x$, on retrouve la même valeur. Mais, en

en posant
$$\sqrt{1+x^2} = z+x$$
d'où
$$1 = z^2+2zx$$
$$0 = zdz + zdx + xdz$$
$$0 = (z+x)dz + zdx$$
$$\frac{dx}{z+x} = -\frac{dz}{z}$$
on aura
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = -\int \frac{dz}{z} = -\mathcal{L}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) + C.$$
Il faut voir que ces deux formes sont bien identiques. Et en effet :
$$-\mathcal{L}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = \mathcal{L}\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = \mathcal{L}\,\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{1} = \mathcal{L}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

Supposons maintenant que c, coefficient de x^2 sous le radical, étant négatif, on ait
$$\int f\left(x, \sqrt{a+2bx-x^2}\right)dx$$
La première transformation ne peut s'employer sans imaginaires. On a donc recours à un autre artifice.

Supposons d'abord que a soit positif. — alors, posons
$$\sqrt{a+2bx-x^2} = \sqrt{a} + xz$$
$$\cancel{a}+2bx-x^2 = \cancel{a} + 2xz\sqrt{a} + z^2x^2$$
Divisant par x :

$$2b - x = 2z\sqrt{a} + xz^2$$

$$x = 2\,\frac{b - z\sqrt{a}}{1+z^2}$$

D'ailleurs l'équation précédente, différentiée, donne

$$-dx = 2\sqrt{a}\,dz + 2zx\,dz + z^2 dx$$

$$dx\left(1+z^2\right) = -2dz\left(\sqrt{a}+xz\right)$$

Donc

$$\frac{dx}{\sqrt{a}+xz} = -\frac{2dz}{1+z^2}$$

et il n'y a plus qu'à substituer.

En particulier, on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx-x^2}} = -2\int\frac{dz}{1+z^2} = -2\,\mathrm{arc\,tg}\,z$$

$$= -2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sqrt{a+2bx-x^2}-\sqrt{a}}{x} + C$$

Si $b=0$ et $a=1$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} + C$$

Il est évident que cette méthode aurait pu être appliquée aussi au cas précédent, toutes les fois pourtant que a est positif.

Mais, si a est négatif, il faut s'y prendre autrement.

Soit

$$\sqrt{-a+2bx-x^2}$$

Posons

$$x^2 - 2bx + a = 0$$

Si les racines sont réelles, ce qui doit être d'ailleurs pour que le Radical proposé soit réel, on pourra employer la transformation suivante. Soient α et β ces deux racines.

On a

$$\sqrt{-a+2bx-x^2} = \sqrt{-(x-\alpha)(x-\beta)}$$

Posons

$$\sqrt{-(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)z$$

d'où

$$\beta - x = z^2(x-\alpha)$$

$$x = \frac{\beta+\alpha z^2}{1+z^2}$$

d'où encore

$$-dx = 2z\,dz\,(x-\alpha) + z^2 dx$$

$$dx(1+z^2) = -2z\,dz\,(x-\alpha)$$

$$\frac{dx}{z(x-\alpha)} = \frac{dx}{\sqrt{-a+2bx-x^2}} = -\frac{2dz}{1+z^2}$$

même résultat que tout-à-l'heure.

Cette transformation est toujours applicable au cas où l'on a sous le Radical $+a$ et $-x^2$: car alors α et β sont essentiellement réels.

Application. – Nous avons trouvé

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -2\,\text{arc tg}\,\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} + C$$

Cherchons directement cette intégrale par la dernière méthode.

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(x+1)(1-x)} = z(x+1)$$

$$1-x = z^2(x+1)$$

$$-dx = 2z\,dx\,(x+1) + z^2 dx$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-z^2}} = -\frac{2\,dz}{z^2+1}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -2\int \frac{dz}{1+z^2} = -2\,\text{arc}\,\text{tg}\,z + C = -2\,\text{arc}\,\text{tg}\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -2\,\text{arc}\,\text{tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C$$

Résultat qui doit être identique au précédent. or il est aisé de le vérifier. Car posons $\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = u$, $\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x} = v$ on doit avoir

$$\text{arc}\,\text{tg}\,u - \text{arc}\,\text{tg}\,v = \text{Const.}$$

Donc la tangente du 1er. membre doit être constante :

$$\text{Tg}\left\{\text{arc}\,\text{tg}\,u - \text{arc}\,\text{tg}\,v\right\} = \frac{\text{Tg}(\text{arc}\,\text{tg}\,u) - \text{Tg}(\text{arc}\,\text{tg}\,v)}{1 + \text{Tg}(\text{arc}\,\text{tg}\,u).\,\text{Tg}(\text{arc}\,\text{tg}\,v)} = \text{Const.}$$

or ceci donne

$$\frac{u-v}{1+uv} = \text{Const.}$$

Substituant à u et v leurs valeurs, on trouve

$$\frac{u-v}{1+uv} = -1$$

ainsi les deux résultats reviennent au même.

D'ailleurs, on sait immédiatement que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\,\sin x + C$$

et il s'agit encore de ramener cette dernière forme à la précédente. — Posons

$$\text{arc}\,\text{tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = u$$

D'où

$$\text{Tg}\,u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$\operatorname{Tg} 2u = \frac{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1-\frac{1-x}{1+x}} = 2\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x}$$

$$2u = \operatorname{arc} \operatorname{Tg}. \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{arc} \operatorname{Tg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$$

or, posons $\operatorname{arc} \operatorname{Sin} x = q$

$$\begin{cases} x = \operatorname{Sin} q \\ \sqrt{1-x^2} = \operatorname{Cos} q \end{cases}$$

alors

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{arc} \operatorname{Tg} \frac{\operatorname{Cos} q}{\operatorname{Sin} q} = -\operatorname{arc} \operatorname{Tg} (\operatorname{Cot} q) = -\left(\frac{\pi}{2} - q\right) + C$$

L'autre formule est $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = q + C$. or ces deux valeurs ne diffèrent que par une constante.

Reprenons enfin l'expression

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx-x^2}}$$

Nous avons trouvé pour intégrale des arcs Tang. , et, dans un cas particulier, une forme plus simple, un arc Sinus. — on peut encore trouver ici un arc Sinus, en ramenant l'expression au type $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$. Pour cela,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a+b^2-(x-b)^2}} = \int \frac{\frac{dx}{\sqrt{a+b^2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-b}{\sqrt{a+b^2}}\right)^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx-x^2}} = \text{arc Sin}\,\frac{x-b}{\sqrt{a+b^2}} + C.$$

Cette dernière formule est préférable aux précédentes.

Au-delà du second degré, l'intégration est en général impossible. Ainsi, on ne sait pas intégrer

$$\int \frac{X\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}}$$

L'évanouissement des puissances impaires est toujours possible. (Quomodo?)

Cas particulier :

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx^2+cx^4}}$$

en posant $x^2 = z$, on retombe sur les radicaux du 2^d. degré.

Différentielle Binôme.

Sa forme est
$$x^{m-1}\left(a+bx^{n}\right)^{p}dx$$

p étant essentiellement fractionnaire, nous prendrons
$$x^{m-1}\left(a+bx^{n}\right)^{\frac{p}{q}}dx.$$

on peut ramener à ce type d'autres expressions qui paraissent moins simples. ainsi
$$x^{m-1}\left(ax^{r}+bx^{n}\right)^{\frac{p}{q}}=x^{m+\frac{rp}{q}-1}\left(a+bx^{n-r}\right)^{\frac{p}{q}}$$

m et n peuvent toujours être regardés comme entiers. Car si l'on a
$$x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(a+bx^{\frac{\gamma}{\delta}}\right)^{\frac{p}{q}}$$

en posant $x=z^{\beta\delta}$, on sera ramené à une fonction de même forme.

Enfin, n peut toujours être regardé comme positif. Car
$$x^{m-1}\left(a+bx^{-n}\right)^{\frac{p}{q}}=x^{m-1}x^{-n\frac{p}{q}}\left(ax^{n}+b\right)^{\frac{p}{q}}=x^{m-n\frac{p}{q}-1}\left(b+ax^{n}\right)^{\frac{p}{q}}$$

Posons donc
$$y=\int x^{m-1}\left(a+bx^{n}\right)^{\frac{p}{q}}dx$$

m et n entiers, n positif.

Soit
$$a+bx^{n}=z^{q}$$

alors
$$x^{n}=\frac{z^{q}-a}{b}$$

$$x^m = \left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$$

d'où

$$m x^{m-1} dx = \frac{m}{n}\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1} \frac{q z^{q-1}}{b} dz$$

$$x^{m-1} dx = \frac{q z^{q-1}}{nb}\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1} dz$$

Donc, substituant,

$$y = \frac{q}{nb}\int\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1} z^{p+q-1} dz$$

On voit donc que si $\frac{m}{n}-1$, ou $\frac{m}{n}$ par conséquent, est un nombre entier, l'intégration est ramenée à celle des fonctions rationnelles.

Il y a un second cas où l'on peut intégrer. On a

$$a + bx^n = x^n\left(b + ax^{-n}\right)$$

Donc

$$y = \int x^{m+\frac{np}{q}-1}\left(b+ax^{-n}\right)^{\frac{p}{q}} dx$$

appliquant ici le caractère précédent, on voit que si

$$\frac{m+\frac{np}{q}}{n} = \frac{m}{n} + \frac{p}{q}$$

est un nombre entier, l'intégration est possible. alors, on devra poser

$$b + ax^{-n} = z^q$$

ou

$$a + bx^n = x^n z^q$$

Hors ces deux cas, on ne sait rien de général.

Les mêmes raisonnements s'appliqueraient évidemment si m et n n'étaient pas entiers.

Applications. — Soit

$$y = \int x^3 (a+bx^2)^{\frac{7}{3}} dx$$

La première condition est remplie. Posons

$$a+bx^2 = z^3$$

$$x^2 = \frac{z^3-a}{b}$$

$$x^4 = \frac{(z^3-a)^2}{b^2}$$

$$x^3 dx = \frac{3}{2b^2}(z^3-a) z^2 dz$$

Donc

$$y = \frac{3}{2b^2}\int (z^3-a) z^5 dz = \frac{3}{2b^2}\left(\frac{z^9}{9} - \frac{az^6}{6}\right) + C$$

$$y = \frac{3}{2b^2}\left\{\frac{(a+bx^2)^3}{9} - \frac{a}{6}(a+bx^2)^2\right\} + C$$

$$y = \frac{(a+bx^2)^2}{2b^2}\left(\frac{a+bx^2}{3} - \frac{a}{2}\right) + C$$

Soit encore

$$y = \int x^2 (a+bx^2)^{\frac{5}{2}} dx$$

La seconde condition seule est remplie.

$$a+bx^2 = x^2 z^2$$

$$x^2 = \frac{a}{z^2-b}$$

$$x^3 = \left(\frac{a}{z^2-b}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$x^2 dx = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{z^2-b}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{-2az\,dz}{(z^2-b)^2} = -\frac{a^{\frac{3}{2}} z\,dz}{(z^2-b)^{\frac{5}{2}}}$$

avec cela,

$$(a+bx^2)^{\frac{5}{2}} = (x^2z^2)^{\frac{5}{2}} = z^5 x^5 = z^5 \cdot \left(\frac{a}{z^2-b}\right)^{\frac{5}{2}}$$

Donc enfin
$$y = -\int \frac{a^4 z^6 \, dz}{(z^2-b)^5}$$
résultat rationnel et facile à intégrer.

---

on peut appliquer l'intégration par parties, mais elle ne donne rien de plus.

Soit
$$y = \int x^{m-1}(a+bx^n)^p \, dx$$
Posons
$$x^n = z$$
alors
$$y = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m}{n}-1}(a+bz)^p \, dz$$
Nous pouvons donc toujours prendre
$$y = \int x^{m-1}(a+bx)^p \, dx$$
m en général étant devenu fractionnaire, de même que p.

D'abord, on [peut] toujours s'arranger de façon que m et p deviennent compris entre 0 et 1.

En effet, cherchons premièrement à abaisser l'exposant m.

on a
$$y = x^{m-1}\frac{(a+bx)^{p+1}}{b(p+1)} - \frac{m-1}{b(p+1)}\int (a+bx)^{p+1} x^{m-2} \, dx$$

Ce 1er résultat serait excellent si l'on avait $m>0$, $p<0$. Mais, en général, il ne faut pas que p change. Or
$$(a+bx)^{p+1} = (a+bx)^p(a+bx) = a(a+bx)^p + bx(a+bx)^p$$
Donc
$$y = x^{m-1}\frac{(a+bx)^{p+1}}{b(p+1)} - \frac{(m-1)a}{b(p+1)}\int (a+bx)^p x^{m-2} \, dx - \frac{m-1}{p+1}\int x^{m-1}(a+bx)^p \, dx$$

La dernière intégrale représente justement y. Donc, en réduisant,

$$\frac{p+m}{p+1}\int x^{m-1}(a+bx)^p dx = \frac{x^{m-1}(a+bx)^{p+1}}{b(p+1)} - \frac{(m-1)a}{(p+1)b}\int (a+bx)^p x^{m-2} dx$$

et enfin

$$\int x^{m-1}(a+bx)^p dx = \frac{x^{m-1}(a+bx)^{p+1}}{b(p+m)} - \frac{(m-1)a}{(p+m)b}\int x^{m-2}(a+bx)^p dx$$

Répétant cette opération sur la dernière intégrale, on arrivera ainsi, après un nombre convenable d'opérations, à ce que l'exposant m soit compris entre 0 et 1.

Secondement, on peut en faire autant pour p. Car, $x^m dx$ étant une différentielle exacte, on a

$$\int x^m dx (a+bx)^p = \frac{(a+bx)^p x^{m+1}}{m+1} - \frac{bp}{m+1}\int x^{m+1}(a+bx)^{p-1} dx$$

Or, on a

$$bx^{m+1} = bx \cdot x^m = (a+bx)x^m - ax^m$$

Donc

$$\int x^m dx (a+bx)^p = \frac{(a+bx)^p x^{m+1}}{m+1} - \frac{p}{m+1}\int (a+bx)^p x^m dx + \frac{ap}{m+1}\int x^m (a+bx)^{p-1} dx$$

Donc

$$\int x^m (a+bx)^p dx = \frac{(a+bx)^p x^{m+1}}{m+p+1} + \frac{ap}{m+p+1}\int (a+bx)^{p-1} x^m dx$$

C'est là la formule de réduction pour l'exposant p.

Elle devient illusoire pour $m+p+1=0$: mais alors on rentre évidem^t. dans le 2e. cas d'intégrabilité donné plus haut, celui où $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=$ entier. Car ici m et p représentent $\frac{m}{n}$ et $\frac{p}{q}$ et leur somme est -1. — Si $a=0$, on n'au-

-ra pas un cas d'intégrabilité nouveau, car on a alors une différentielle monôme.

Cette méthode ne donne donc rien de nouveau, mais elle ramène la difficulté à sa plus simple expression.

La dernière formule, au lieu de satisfaire à la condition demandée, compliquerait le résultat si p était négatif. Mais alors, en résolvant la dernière équation par rapport à l'autre intégrale, on aurait

$$\int (a+bx)^{p-1} x^m dx = -\frac{(a+bx)^p x^{m+1}}{ap} + \frac{m+p+1}{ap}\int x^m (a+bx)^p dx$$

et, mettant le signe de p en évidence, et posant $p-1=-p$

$$\int \frac{x^m dx}{(a+bx)^p} = \frac{x^{m+1}}{a(p-1)(a+bx)^{p-1}} - \frac{m-p+2}{a(p-1)}\int \frac{x^m dx}{(a+bx)^{p-1}}$$

Comme application de ~~cette~~ dernière ~~formule~~, prenons

$$y = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ou

$$y = \int x^m (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

Si m est impair, on a $\frac{m+1}{n}$ = entier : si m est pair, $\frac{m+1}{n}+\frac{p}{q}$ est entier : donc l'intégration est toujours possible.

Intégrons par partie (on pourrait appliquer la 1ère formule de réduction pour m) :

$$\int x^m (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \int x^{m-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} x dx = -x^{m-1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + (m-1)\int x^{m-2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

or on a

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x^2) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$y = -x^{m-1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + (m-1)\int x^{m-2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx - (m-1)y$$

ou

$$y = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{m}x^{m-1}\sqrt{1-x^2} + \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

et, si m est entier, on arrivera ainsi à l'une des formules

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{ou} \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

qu'on sait intégrer.

Voici le résultat :

1°. m pair :

$$\int \frac{x^{2m}dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left\{\frac{x^{2m-1}}{2m} + \frac{2m-1}{2m}\,\frac{x^{2m-3}}{2m-2} + \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\,\frac{x^{2m-5}}{2m-4} + \cdots\right\}\sqrt{1-x^2}$$

$$+ \frac{(2m-1)(2m-3)(2m-5)\ldots 5.3.1}{2m(2m-2)(2m-4)\ldots 6.4.2}\,\text{arc}\,\sin x + C$$

2°. m impair.

$$\int \frac{x^{2m}dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left\{\frac{x^{2m}}{2m+1} + \frac{2m}{2m+1}\,\frac{x^{2m-2}}{2m-1} + \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{x^{2m-4}}{2m-3} + \cdots\right\}\sqrt{1-x^2} + C$$

Si m était négatif, que faudrait-il faire ?

Voir p. 501.

Intégration des
Différentielles Transcendantes.

D'abord, il y a certains cas où l'on peut passer des fonctions transcendantes aux fonctions algébriques.

En effet, soit

$$f(e^x)\,dx$$

$$f(\sin x)\,dx$$

$$f(\cos x)\,dx$$

même

$$f(\cos x, \sin x)\,dx$$

f étant une fonction algébrique.

Pour $f(e^x)dx$, soit

$$y = e^x$$

$$dx = \frac{dy}{y}$$

Donc

$$\int f(e^x)\,dx = \int f(y)\,\frac{dy}{y}$$

Pour $f(\sin x)dx$, soit

$$y = \sin x$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

de même pour $f(\cos x)dx$.

Enfin, dans le dernier, il viendrait $\int (y, \sqrt{1-y^2}) \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$.

Dans ce dernier cas, si l'on posait

$$y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

D'où

$$dx = 2 \cos^2 \frac{x}{2}\, dy = \frac{2dy}{1+y^2}$$

et

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 . \frac{y}{1+y^2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

on aurait

$$\int f(\sin x, \cos x)\, dx = \int \frac{2 f\left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{1-y^2}{1+y^2}\right) dy}{1+y^2}$$

où tout est rationnel.

Revenons au cas général.

D'abord, il y a des expressions transcendantes qui sont immédiatement intégrables.

ainsi :

$$\int (Lx)^m \frac{dx}{x} = \frac{(Lx)^{m+1}}{m+1} + C$$

et beaucoup d'autres formes analogues, comme

$$\int (\sin x)^m \cos x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} + C$$

$$\int (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^m \frac{dx}{1+x^2} = \frac{(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^{m+1}}{m+1} + C$$

De même encore
$$\int a^{nx} dx = \frac{a^{nx}}{n\,La} + C.$$

Un cas plus étendu se résout par l'intégration par parties.

Supposons
$$y = \int a^x p\, dx$$
p étant une fonction rationnelle et entière. on a
$$y = \frac{a^x}{La} p - \frac{1}{La}\int a^x . \frac{dp}{dx} . dx$$
en continuant, on ramènera p à une constante.

Ici, il y a plusieurs lacunes: par exemple:

Intégration des fonctions exponentielles transcendantes.

Intégration par séries.

Intégrales définies.

Voir tout ce qui manque, p. 503 et suivantes.

Intégrales Eulériennes.

La formule Générale des Intégrales Euleriennes de Seconde espèce est

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx.$$

Quelle peut être la valeur de cette intégrale? — En Général on a, en intégrant par parties,

$$\int e^{-x} x^{n-1} dx = -e^{-x} x^{n-1} + (n-1)\int e^{-x} x^{n-2} dx$$

Il s'agit de passer de là aux Intégrales Définies. Or, pour $x=0$, $e^{-x} x^{n-1}$ est nul; pour $x=\infty$, $e^{-x} x^{n-1} = 0.\infty$; mais il est facile de voir que la vraie valeur est 0: car

$$e^{-x} x^{n-1} = \frac{x^{n-1}}{1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}+\cdots}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^{n-2}}+\cdots+\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}+\frac{x}{1.2\ldots n}+\cdots}$$

et, sous cette forme, il devient évident que, si x augmente indéfiniment, la limite est zéro. Donc enfin

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx = (n-1)\int_0^\infty e^{-x} x^{n-2} dx$$

ou

$$\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1)$$

or, comme $\Gamma(1)=1$, on a donc, si n est entier

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3.2.1$$

D'où

$$\Gamma(1) = 1$$
$$\Gamma(2) = 1$$
$$\Gamma(3) = 1.2$$
$$\vdots$$
$$\Gamma(n) = 1.2.3..(n-1)$$

Si n n'est pas entier, la formule de réduction s'appliquera du moins jusqu'à ce qu'on soit ramené à une intégrale $\Gamma(\nu)$, ν étant compris entre 0 et 1. Si donc, pour $\nu \gtrless 1$, on a dressé d'avance une table des valeurs de $\Gamma(\nu)$, on pourra toujours avoir au moins approximativement, l'intégrale Eulérienne de seconde espèce.

Si n est négatif, cette intégrale n'a plus de valeur: elle devient infinie; en effet, la valeur de $\Gamma(n)$ devenant alors $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x x^{n+1}}$, je remarque que tous ses éléments sont essentiellement positifs; il me suffira donc de démontrer que $\int_0^1 \frac{dx}{e^x x^{n+1}}$ est infinie. Or, prenons d'abord $\int_a^1 \frac{dx}{e^x x^{n+1}}$. On a évidemment

$$\int_a^1 \frac{dx}{e^x x^{n+1}} > \int_a^1 \frac{dx}{e\,x} > \left\{\frac{1}{e} \mathcal{L} x\right\}_{x=a}^{x=1} > \frac{1}{e} \mathcal{L}\frac{1}{a}$$

et, pour $a = 0$, $\mathcal{L}\frac{1}{a} = \infty$: donc la proposition est démontrée.

Pour les intégrales Eulériennes de première espèce, prenons-la d'abord sous la forme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta \, d\theta$$

et posons $x = \sin^2\theta$, d'où $dx = 2 \sin\theta \cos\theta \, d\theta$, et $\sin\theta = x^{\frac{1}{2}}$, $\cos\theta = (1-x)^{\frac{1}{2}}$, par suite $d\theta = \frac{1}{2} dx . x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}}$ et enfin $\sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta \, d\theta = \frac{1}{2} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$, donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = B(p.q)$$

Double expression de l'intégrale Eulérienne de 1ère Espèce, qu'on représente habituellement par $B(p.q)$. — Cette intégrale se présente sous la forme d'une intégrale de différentielle binôme, cas pour lequel on a donné deux formules de réduction, suivant qu'on veut abaisser l'un ou l'autre exposant. Ces formules (p. 223) deviennent ici

$$\int x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{x^{p-1}(1-x)^q}{-(p+q-1)} + \frac{p-1}{p+q-1}\int x^{p-2}(1-x)^{q-1}dx$$

$$\int x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{x^p(1-x)^{q-1}}{-(p+q-1)} + \frac{q-1}{p+q-1}\int x^{p-1}(1-x)^{q-2}dx$$

d'où

$$B(p.q) = \frac{p-1}{p+q-1}B(p-1.q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p.q-1)$$

Ces fonctions Eulériennes de première espèce peuvent d'ailleurs se ramener à celles de seconde espèce par la formule très-simple

$$B(p.q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

dont nous allons donner une démonstration à posteriori : on peut écrire

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2p-1}dy$$

en posant $x = y^2$ dans la formule connue ; et de même

$$\Gamma(q) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2q-1}dx$$

d'où

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}x^{2q-1}y^{2p-1}dx\,dy$$

or cela représente le volume compris entre le plan des xy

et la surface qui aurait pour équation

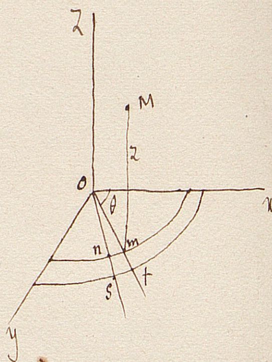
$$(1) \qquad z = e^{-(x^2+y^2)} x^{2q-1} y^{2p-1}$$

Cherchons à calculer ce volume d'une autre manière : et pour cela, changeons les variables, en prenant

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\theta = \text{angle } mox$$

et conservant z. Calculons l'élément de volume dv qui a pour base $mnst$. Nous aurons



$$mnst = tos - mon = \frac{1}{2}(r+dr)^2 d\theta - \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$= r\,dr\,d\theta$$

$$dv = zr\,dr\,d\theta = re^{-r^2} r^{2q-1} \cos^{2q-1}\theta . r^{2p-1} \sin^{2p-1}\theta\, dr\, d\theta$$

$$dv = e^{-r^2} r^{2p+2q-1} \cos^{2q-1}\theta \sin^{2p-1}\theta\, dr\, d\theta$$

On verrait facilement que la surface est asymptotique au plan des xy : donc il faut intégrer de 0 à ∞ pour z, et évidemment de 0 à $\frac{\pi}{2}$ pour θ, afin d'avoir la portion de volume comprise entre la surface et les 3 plans coordonnés positifs, seule partie représentée par l'intégrale double qui entre dans la valeur de $\Gamma(p)\,\Gamma(q)$. Donc

$$V = \int_0^\infty dr \left[r^{2p+2q-1} e^{-r^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2q-1}\theta \sin^{2p-1}\theta\, d\theta \right]$$

r et θ sont tout-à-fait indépendants l'un de l'autre. On peut donc séparer les deux intégrales, de façon qu'on a définitivement :

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 2\int_0^\infty r^{2p+2q-1} e^{-r^2} dr \times 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2q-1}\theta \sin^{2p-1}\theta\, d\theta$$

$$= \Gamma(p+q) . B(p.q)$$

c q f d.

Cette formule :

$$B(p\cdot q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

donne, en y changeant p en $p-1$ par exemple,

$$B(p-1\cdot q) = \frac{\Gamma(p-1)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q-1)} = \frac{\frac{1}{p-1}\,\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\frac{1}{p+q-1}\,\Gamma(p+q)} = \frac{p+q-1}{p-1}\,B(p\cdot q)$$

formule déjà trouvée précédemment.

Les intégrales Eulériennes de première espèce, comme celles de seconde, deviennent infinies quand les exposants sont négatifs. La démonstration est la même.

Intégration des Fonctions de Plusieurs Variables.

On sait que si

$$u = f(x, y)$$

on a

$$du = M\,dx + N\,dy \qquad \begin{cases} M = \dfrac{du}{dx} = \varphi(x, y) \\ N = \dfrac{du}{dy} = \psi(x, y) \end{cases}$$

et l'on sait toujours trouver du.

Réciproquement, étant donné

$$du = M\,dx + N\,dy$$

comment pourra-t-on retrouver la fonction u?

Et d'abord, cette fonction existe-t-elle toujours?

Remarquons que l'on a

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d^2u}{dy\,dx}$$

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d^2u}{dx\,dy}$$

donc il faut que l'on ait

$$\frac{dN}{dx} = \frac{dM}{dy}$$

condition toujours nécessaire. Est-elle suffisante? c'est ce que le calcul va démontrer.

J'observe que si je prends $\int M\,dx$, u n'en pourra différer que par une fonction de y, puisque M est la dérivée de u par rapport à x, et que par suite u ne peut contenir

aucun terme en x qui n'ait concouru à la formation de M. Je pourrai donc poser

$$u = \int M dx + Y$$

Reste à trouver Y. — Mais maintenant, pour que cette dernière égalité ait réellement lieu, il faudra que l'on ait $\frac{du}{dy} = N$, c.à.d.

$$N = \frac{d.\int M dx}{dy} + \frac{dY}{dy}$$

Si l'on pose pour abréger

$$\int M dx = V$$

il vient

$$N - \frac{dV}{dy} = \frac{dY}{dy}$$

d'où

$$Y = \int \left(N - \frac{d.V}{dy}\right) dy + C$$

à présent, pour que cette valeur puisse nous convenir, il faut que, sous le signe $\int$, il ne reste point d'x, donc que la dérivée par rapport à x de la quantité entre parenthèses soit identiquement nulle, et que l'on ait

$$\frac{dN}{dx} - \frac{d^2V}{dy\,dx} = 0$$

ou

$$\frac{dN}{dx} - \frac{d.\frac{dV}{dx}}{dy} = 0$$

c.à.d.

$$\frac{dN}{dx} - \frac{d.M}{dy} = 0$$

car $V = \int M dx$

condition déjà trouvée, et qu'on voit ainsi être nécessaire et suffisante.

On aura donc enfin

$$(1) \qquad u = \int M dx + \int \left(N - \frac{d.\int M dx}{dy}\right) dy + C$$

valeur à laquelle on peut encore donner une autre forme. Car

$$\frac{d.\int M dx}{dy} = \int \frac{dM}{dy}.dx = \int \frac{dN}{dx}.dx$$

De sorte qu'on aura encore

$$(2) \qquad u = \int M dx + \int \left(N - \int \frac{dN}{dx}.dx\right) dy + C$$

forme moins simple que la précédente pour le calcul, puisque une différentiation dans celle-ci est remplacée dans la dernière par une intégration.

Exemple. – Soit la fonction

$$du = \left\{\frac{1}{x} - \left(\frac{y}{x-y}\right)^2\right\} dx + \left\{\left(\frac{x}{x-y}\right)^2 - \frac{1}{y}\right\} dy$$

on aura

$$\int M dx = \mathcal{L}x - y^2 \int \frac{dx}{(x-y)^2} = \mathcal{L}x + \frac{y^2}{x-y}$$

$$\int \left(N - \frac{d\int M dx}{dy}\right) dy = \int \left\{\left(\frac{x}{x-y}\right)^2 - \frac{1}{y} - \frac{2y(x-y)+y^2}{(x-y)^2}\right\} dy = \int \left(1 - \frac{1}{y}\right) dy = y - \mathcal{L}y$$

Donc enfin

$$u = \frac{y^2}{x-y} + y + \mathcal{L}\frac{x}{y} + C$$

$$u = \mathcal{L}\frac{x}{y} + \frac{xy}{x-y} + C$$

Quelquefois, on présente la valeur de u sous une autre forme qui peut être utile. Reprenons l'expression

$$du = M dx + N dy$$

D'abord, on aura

$$u = \int M dx + Y$$

ce que l'on pourra écrire avec tout autant de généralité,

De cette manière :

$$u = \int_{x_0}^{x} M dx + Y$$

Reste à trouver Y. Or, on tire de là

$$u - \int_{x_0}^{x} M dx = Y$$

Différentiant par rapport à y, et remarquant que $\frac{du}{dy} = N$, on aura

$$N - \int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dy} dx = \frac{dY}{dy}$$

ou

$$N - \int_{x_0}^{x} \frac{dN}{dx} . dx = \frac{dY}{dy}$$

Posons, pour plus de symétrie,

$$M = \varphi(x, y)$$

$$N = \psi(x, y)$$

il viendra

$$\psi(x, y) - \int_{x_0}^{x} \frac{d . \psi(x, y)}{dx} dx = \frac{dY}{dy}$$

Mais

$$\int \frac{d . \psi(x, y)}{dx} dx = \psi(x, y) + C$$

C contenant y ; et

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d \psi(x, y)}{dx} dx = \psi(x, y) - \psi(x_0, y)$$

Donc

$$\frac{dY}{dy} = \psi(x_0, y)$$

D'où

$$Y = \int_{y_0}^{y} \psi(x_0, y) dy + C$$

D'où enfin

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y) dx + \int_{y_0}^{y} \psi(x_0, y) dy + C$$

Dans la pratique, cette méthode n'a point d'avantages, à cause de la multiplicité des constantes qu'elle introduit dans le calcul.

Cas de trois variables.

Soit

$$du = Mdx + Ndy + Pdz$$

Cherchons d'abord les conditions de possibilité. Or, on a

$$\left\{\begin{array}{l} M = \dfrac{du}{dx} \\ N = \dfrac{du}{dy} \\ P = \dfrac{du}{dz} \end{array}\right.$$

D'où il suit qu'on doit avoir nécessairement

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dM}{dy} = \dfrac{dN}{dx} \\ \dfrac{dM}{dz} = \dfrac{dP}{dx} \\ \dfrac{dN}{dz} = \dfrac{dP}{dy} \end{array}\right.$$

et, en général, s'il y avait m variables, on voit aisément qu'on obtiendrait ainsi $\frac{m(m-1)}{1.2}$ conditions nécessaires. Sont-elles suffisantes? C'est ce que nous allons voir.

Je considère d'abord tout ce qui dépend d'x et d'y: et j'aurai évidemment

$$u = \int (Mdx + Ndy) + Z$$

et cette première intégration sera possible, puisque $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$.

Posons

$$dV = Mdx + Ndy$$

alors il vient:

$$u - v = Z.$$

Différentiant :

$$\frac{du}{dz} - \frac{dv}{dz} = \frac{dZ}{dz}$$

$$Z = \int \left(P - \frac{dv}{dz}\right) dz + C$$

Z devant être fonction de z seulement, il faut que, sous le signe $\int$, il n'y ait plus d'x ni d'y : donc que l'on ait.

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dx} - \dfrac{d^2v}{dz\,dx} = 0 \\ \dfrac{dP}{dy} - \dfrac{d^2v}{dz\,dy} = 0 \end{cases}$$

conditions qui rentrent dans les deux dernières des trois qu'on a trouvées d'abord : car

$$\frac{d^2v}{dz\,dx} = \frac{d\left(\frac{dv}{dx}\right)}{dz} = \frac{dM}{dz}$$

de même

$$\frac{d^2v}{dz\,dy} = \frac{dN}{dz}$$

ainsi, les trois conditions trouvées sont suffisantes, et l'on a

$$u = \int M dx + \int \left(N - \frac{d\int M dx}{dy}\right) dy + \int \left(P - \frac{dv}{dz}\right) dz + C$$

v étant la somme des deux premières intégrales : de sorte que la formule complète est

$$u = \int M dx + \int \left(N - \frac{d\int M dx}{dy}\right) dy + \int \left[P - \frac{d\left\{\int M dx + \int\left(N - \frac{d\int M dx}{dy}\right) dy\right\}}{dz}\right] dz + C$$

Si, comme pour deux variables, on pose

$$\begin{cases} M = \varphi(x, y, z) \\ N = \psi(x, y, z) \\ P = \varpi(x, y, z) \end{cases}$$

on arrivera facilement à la formule

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x,y,z)\,dx + \int_{y_0}^{y} \psi_1(x_0,y,z)\,dy + \int_{z_0}^{z} \pi(x_0,y_0,z)\,dz + C$$

on peut d'ailleurs démontrer à posteriori l'exactitude de cette formule par une vérification, en faisant voir que

$$\frac{du}{dx} = M \qquad \frac{du}{dy} = N \qquad \frac{du}{dz} = P$$

or, on a d'abord

$$\frac{du}{dx} = \varphi(x,y,z)$$

puisque x n'entre que dans la première partie.
Maintenant

$$\frac{du}{dy} = \psi_1(x_0,y,z) + \int_{x_0}^{x} \frac{d.\varphi(x,y,z)}{dy}\,dx$$

$$= \psi_1(x_0,y,z) + \int_{x_0}^{x} \frac{d.\psi_1(x,y,z)}{dx}\,dx$$

$$= \psi_1(x_0,y,z) + \psi_1(x,y,z) - \psi_1(x_0,y,z)$$

$$\frac{du}{dy} = \psi_1(x,y,z) \; .$$

Enfin, de même

$$\frac{du}{dz} = \pi(x_0 y_0 z) + \int_{x_0}^{x} \frac{d\,\varphi(x y z)}{dz}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{d\,\psi_1(x_0 y z)}{dz}\,dz$$

$$= \pi(x_0 y_0 z) + \int_{x_0}^{x} \frac{d.\pi(x y z)}{dx}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{d\,\pi(x_0 y z)}{dy}\,dy$$

$$= \pi(x_0 y_0 z) + \pi(x y z) - \pi(x_0 y z) + \pi(x_0 y z) - \pi(x_0 y_0 z)$$

$$\frac{du}{dz} = \pi(x,y,z)$$

La formule est donc démontrée, et par un

procédé qui prouve en outre qu'elle est Générale.

Théorie de l'Intégration des Équations Différentielles.

L'origine des Équations Différentielles est connue. Si l'on a l'Équation

$$(1) \qquad f(x, y, c) = 0$$

c désignant un paramètre quelconque : si l'on différentie

$$(2) \qquad \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

l'Eq. (2) est l'Équation Différentielle Immédiate : elle contient c en Général. Si l'on élimine ce paramètre entre les Équations (1) et (2), on aura une Équation

$$(3) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

indépendante de c, et exprimant une propriété Générale de la Tangente aux Courbes diverses représentées par l'Eq. (1). C'est l'Équation Différentielle proprement dite.

Il s'agit maintenant, étant donnée l'Eq. (3), de remonter à l'Eq. (1), c.à.d. de trouver une Équation finie entre x et y, dont l'Eq. (3) soit la conséquence. Nous démontrerons plus loin qu'il existe toujours une telle Équation, que

nous apprendrons même à trouver soit exactement et sous forme finie, soit approximativement et à l'aide des séries, et que l'on désigne sous le nom d'Intégrale de l'Eq. différentielle proposée.

Montrons seulement ici que, étant donnée une Eq. différentielle du 1er ordre

$$(1) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

pour que l'Equation qui en est l'Intégrale ait toute la généralité désirable, il faut qu'elle contienne une constante. En effet, dans l'Eq. (1), on peut se donner à volonté $x = a$ et $y = b$, et alors seulement l'Eq. fait connaître $\frac{dy}{dx}$, c.àd. la tangente au point arbitrairement choisi (a, b). Donc l'intégrale doit être telle que la courbe qu'elle représente passe par un point quelconque du plan. Donc cette intégrale doit être de la forme

$$\varphi(x, y, c) = 0$$

Mais elle ne peut contenir deux constantes. Car si elle était

$$\varphi(x, y, c, c') = 0$$

en la différentiant, j'aurais une nouvelle Equation

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx} = 0$$

contenant aussi c et c' : de façon que, d'après le système de ces deux Equations, je pourrais arbitrairement me donner et le point (a, b) et la tangente en ce point, ce qui n'a pas lieu quand on se reporte à l'Eq. différentielle proposée.

On peut aussi remarquer que l'Eq. différentielle elle-même fournit une suite de points dont l'ensemble diffère de moins en moins de la courbe intégrale qu'ils sont plus rapprochés

l'un de l'autre. En effet, cette Équation, quand on s'est donné un point m, détermine la Tangente en ce point ; et, dans le voisinage du point m, la Tangente peut être prise pour la courbe, à un Infiniment petit du Second ordre près : si donc, sur la Tangente, on prend un Second point voisin de m, et qu'on opère pour lui comme pour le précédent, on aura une Série de points qui donnera une idée très-approchée de l'une des courbes Intégrales.

Equations Différentielles du Premier Ordre.

Ce sont celles où $\frac{dy}{dx}$ n'entre qu'au 1er. degré. Elles sont de la forme

$$M + N\frac{dy}{dx} = 0$$

ou

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

Il s'agit de voir comment et dans quels cas on peut intégrer une pareille équation.

Nous considérerons plus loin les équations du 1er. ordre qui contiennent des puissances de $\frac{dy}{dx}$.

1°. Intégration Immédiate.

Il peut arriver que $M\,dx + N\,dy$ soit une différentielle exacte. alors l'intégrale de l'équation s'obtiendra évidemment en égalant à une constante celle de son 1er. membre.

Si par exemple l'équation était $x\,dx + y\,dy = 0$, son intégrale serait $\int(x\,dx + y\,dy) = 0$, c. à d. $x^2 + y^2 = C$, équation qui représenterait une infinité de cercles concentriques.

Mais ce cas si particulier est extrêmement restreint. En effet: Soit pour exemple

$$\frac{y\,dy + (x - 2y)\,dx}{(y-x)^2} = 0$$

Le 1er. membre est une différentielle exacte: car il est facile de voir que $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} = \frac{2y}{(y-x)^3}$. Cela posé, si l'on cherche l'intégrale, on trouvera avec facilité que $\int Mdx = L(y-x) + \frac{y}{y-x}$; que $\int (N - \frac{d\int Mdx}{dy})dy = 0$, et que par conséquent l'intégrale de l'Equation différentielle proposée est

$$L(y-x) + \frac{y}{y-x} = C$$

Ici, la facilité de l'intégration tient uniquement à la présence du facteur $\frac{1}{(y-x)^2}$ dans le 1er. membre de l'Eq. différentielle. Mais on conçoit fort bien que, dans la plupart des cas, ce facteur aura été supprimé dans le courant des calculs, et qu'ici par exemple, on eût donné le plus souvent l'Equation ci-dessus sous la forme

$$y\,dy + (x-2y)dx = 0$$

et le 1er. membre ne serait plus une différentielle exacte: souvent on ne pourra plus alors intégrer. — Plus loin, nous prouverons que, quand le 1er. membre d'une Eq. différentielle n'est pas une différentielle exacte, il existe toujours un facteur, et même une infinité, qui le ramènent à ce cas: et nous en déduirons une méthode d'intégration due à Euler.

Toutes les fois qu'il y a eu ainsi suppression de facteurs, nous manquons de méthode générale pour intégrer même l'Equation différentielle du 1er. ordre et du 1er. degré en $\frac{dy}{dx}$.

Nous allons exposer divers autres cas particuliers dans lesquels on y est parvenu.

2°. – Méthode de la Séparation des Variables.

Cette méthode s'applique toutes les fois que l'Equation Différentielle peut être ramenée à la forme

$$\varphi(x)\,dx = \psi_1(y)\,dy$$

Car alors on aura immédiatement

$$\int \varphi(x)\,dx = \int \psi_1(y)\,dy + C$$

Exemples.

1°. Soit l'Equation $x\,dy - y\,dx = 0$ (1).

D'où

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$Ly = Lx + LC$$

$$y = Cx$$

Cette Equation (1) peut d'ailleurs s'intégrer aussi en rétablissant un fact^r. Si on l'écrit $\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0$ on voit qu'elle devient $d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ d'où $y = Cx$.

2°. Si l'on avait $x\,dy - ay\,dx = 0$, la division par x^2 ne réussirait plus : mais on pourrait séparer les variables. – D'ailleurs, il y a une autre manière encore. Multiplions par x^{a-1} : on a $x^a dy - ayx^{a-1}dx = 0$, ou bien $x^a dy - y\,d(x^a) = 0$, et, si $x^a = z$, $z\,dy - y\,dz = 0$, d'où $y = Cz = Cx^a$.

3°. Soit encore l'Equation

$$XY\,dx + X_1 Y_1\,dy = 0$$

En divisant par YX_1 on aura

$$\frac{X}{X_1}\,dx + \frac{Y_1}{Y}\,dy = 0$$

qu'on peut intégrer.

Dans le cas des Equations Homogènes, on peut toujours effectuer la Séparation des Variables. – En effet, l'Eq. Différentielle peut alors toujours s'écrire

$$x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + x^m \psi_1\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

alors, en posant $\frac{y}{x} = z$, d'où $dy = x\,dz + z\,dx$, et divisant

par x^m, il vient

$$\varphi(z).dx + \psi_1(z)\{x\,dz + z\,dx\} = 0$$

$$\{\varphi(z) + z\psi_1(z)\}dx + \psi_1(z).x\,dz = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi_1(z)}{\varphi(z) + z\psi_1(z)}dz = 0$$

et l'on voit que les Variables sont Séparées.

Ce cas étant assez fréquent, en voici quelques exemples.

1°. Soit l'Equation $(x-2y)dx + ydy = 0$. – Je pose $\frac{y}{x} = z$ si je remplace, et je divise par x. Il vient $(1-2z)dx + z(z\,dx + x\,dz) = 0$; d'où

$$\frac{dx}{x} = -\frac{z\,dz}{1-2z+z^2}$$

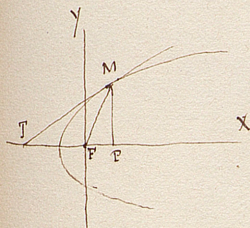
$$\mathcal{L}x = -\int\frac{z\,dz}{1-2z+z^2}$$

Posons $\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1}$, d'où $z = A + B(z-1)$ ou $z(1-B) = A - B$, d'où $A = B = 1$: il vient

$$\mathcal{L}x = -\int\frac{dz}{(z-1)^2} - \int\frac{dz}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \mathcal{L}(z-1) + C$$

ou bien, en remplaçant z par sa valeur,

$$\mathcal{L}x = \frac{x}{y-x} - \mathcal{L}\frac{y-x}{x} + C, \quad \mathcal{L}(y-x) = \frac{x}{y-x} + \mathcal{L}c, \quad y - x = Ce^{\frac{x}{y-x}}.$$



2°.– On sait que, dans une Parabole rapportée à son foyer et à deux axes orthogonaux dont l'un est son diamètre principal, le rayon vecteur FM est égal à la longueur FT comprise sur l'axe des x, entre le foyer et la tangente en M. – Si maintenant on veut savoir si la parabole est la seule courbe qui jouisse de cette propriété, il faudra avoir recours au calcul Intégral.– Ecrivons que $FM = FT$. or $FM = \sqrt{x^2+y^2}$ $FT = PT - FP = y\frac{dx}{dy} - x$ donc l'Eq. Différentielle du problème est

$$(\sqrt{x^2+y^2} + x)\,dy = y\,dx$$

Cette Equation est homogène : on peut donc l'intégrer. On aura

$$(\sqrt{1+z^2} + 1)(z\,dx + x\,dz) = z\,dx$$

$$z\,dx\sqrt{1+z^2} + x(\sqrt{1+z^2}+1)dz = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{\sqrt{1+z^2}+1}{z\sqrt{1+z^2}}dz = 0$$

d'où

$$\mathcal{L}x = -\int\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z\sqrt{1+z^2}} = -\int\frac{dz}{z\sqrt{1+z^2}} - \int\frac{dz}{z} = -\mathcal{L}z - \int\frac{dz}{z\sqrt{1+z^2}}.$$

La dernière Intégrale pourrait se trouver par la méthode Générale, mais il y a un moyen plus simple : car

$$\int\frac{dz}{z\sqrt{1+z^2}} = \int\frac{\frac{dz}{z^2}}{\sqrt{\frac{1}{z^2}+1}} = -\int\frac{d\cdot\frac{1}{z}}{\sqrt{\frac{1}{z^2}+1}} = -\mathcal{L}\left(\frac{1}{z} + \sqrt{\frac{1}{z^2}+1}\right)$$

Donc enfin l'intégrale est

$$Lx = L\left(\frac{1}{z}+\sqrt{\frac{1}{z^2}+1}\right) - Lz + Lc = L\left(\frac{x}{y}+\frac{1}{y}\sqrt{x^2+y^2}\right) - L\frac{y}{x} + Lc$$

$$Lx = L\left(c\frac{x}{y^2}\sqrt{x^2+y^2} + c\frac{x^2}{y^2}\right)$$

$$y^2 = c(x+\sqrt{x^2+y^2})$$

$$(y^2-cx)^2 = c^2(x^2+y^2)$$

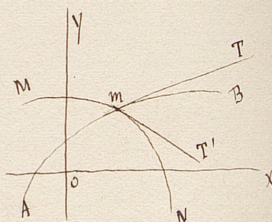
$$y^4 - 2cxy^2 = c^2y^2$$

$$y^2 = 2cx + c^2$$

Équation générale des Paraboles qui ont F pour foyer et FX pour axe.

3°. Comme dernière application du cas des Équations homogènes, occupons-nous du problème des Trajectoires. On suppose qu'on donne une Équation

Problème des Trajectoires.



$$(1) \qquad f(x, y, c) = 0$$

qui représente une Infinité de courbes. On demande une courbe qui les coupe toutes sous un même angle donné.

Soit K la tangente trigonométrique de cet angle, AB une des courbes représentées par l'Eq. (1), MN la courbe demandée. Soient x et y les coordonnées du point m. Le coefficient angulaire de la tangente en m à la courbe MN est $a' = \frac{dy}{dx}$; à la courbe AB, c'est $a = -\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{df}{dy}\right)}$. On doit donc avoir

$$K = \frac{a'-a}{1+aa'} = \left(\frac{dy}{dx} + \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}\right) : \left(1 - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}\right)$$

ou bien

$$(2) \qquad K\left(\frac{df}{dy} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{df}{dx}\right) = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{df}{dy} + \frac{df}{dx}$$

C'est là une condition du problème. Cette Équation renferme c. Si l'on élimine c entre les Équations (1) et (2), on aura un résultat

$$(3) \qquad \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

qui sera l'Eq. Différentielle de la courbe, ou plutôt des courbes demandées, puisque l'on voit ainsi, si on ne l'avait pas prévu à priori, que le problème admet une Infinité de solutions.

Nous ne pouvons faire l'élimination en général. Mais prenons le cas particulier des courbes paraboliques et hyperboliques, renfermées dans l'Équation

$$(1) \qquad y^m = cx^n$$

L'Équation (2) devient alors

$$(2) \qquad K\left(my^{m-1} + cnx^{n-1}\frac{dy}{dx}\right) = my^{m-1}\frac{dy}{dx} - cnx^{n-1}$$

Si l'on multiplie par x et qu'on remplace c par sa valeur, on aura

$$K\left(mxy^{m-1} + ny^m\frac{dy}{dx}\right) - mxy^{m-1}\frac{dy}{dx} + ny^m = 0$$

ou

$$(3) \qquad K\left(mx + ny\frac{dy}{dx}\right) - mx\frac{dy}{dx} + ny = 0$$

Telle est l'Eq. Différentielle du problème. Elle est homogène ; on pourra donc l'intégrer. On aura successivement

$$(Kmx+ny)dx - (mx - Kny)dy = 0$$

$$(Km+nz)dx - (m-Knz)(xdz+zdx) = 0$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{(m-Knz)dz}{Knz^2+(n-m)z+Km}$$

$$Lx = \int \frac{(m - knz)\,dz}{knz^2 + (n-m)z + km}$$

Cette Intégrale peut être simplifiée. Remarquons en effet que la dérivée du dénominateur est $2knz + n - m$. on aura donc

$$\int \frac{(m-knz)\,dz}{knz^2+(n-m)z+km} = -\frac{1}{2}\int \frac{(2knz+n-m)\,dz}{knz^2+(n-m)z+km} + \frac{m+n}{2}\int \frac{dz}{knz^2+(n-m)z+km}$$

D'ailleurs évidemment

$$\int \frac{(2knz+n-m)\,dz}{knz^2+(n-m)z+km} = L\{knz^2+(n-m)z+km\} + C$$

Quant à la dernière intégrale, il faut distinguer deux cas, suivant que les racines du dénominateur égalé à zéro sont imaginaires ou réelles. dans le 1er cas on aura pour intégrale un arc tangente, dans le second un Logarithme.

Comme cas particulier, faisons $m = n = 1$. Nous aurons

$$Lx = \int \frac{(1-kz)\,dz}{k(z^2+1)} = \int \frac{dz}{k(z^2+1)} - \int \frac{z\,dz}{(z^2+1)} = \frac{1}{k}\int \frac{dz}{z^2+1} - \frac{1}{2}L(z^2+1) = \frac{1}{k}\,\text{arc tg}\,z - \frac{1}{2}L(z^2+1) + C$$

$$Lx + \frac{1}{2}L\frac{x^2+y^2}{x^2} - \frac{1}{k}\,\text{arc tg}\,\frac{y}{x} - C = 0$$

$$L\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{k}\,\text{arc tg}\,\frac{y}{x} + C$$

Telle est l'équation cherchée. - Si l'on y introduit les coordonnées polaires, en y posant $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, il vient

$$Lr = \frac{1}{k}\,\text{arc tg}\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + C = \frac{1}{k}\,\theta + C$$

$$r = e^{C}.\,e^{\frac{\theta}{k}}$$

$$r = C.\,e^{\frac{\theta}{k}}$$

Équation d'une infinité de Spirales Logarithmiques: et il était facile de prévoir à priori ce résultat, puisque, pour $m = n = 1$, l'équation $y^m = cx^n$ se réduit à $y = cx$, et représente une série de droites passant par l'origine; la question était donc ici ramenée à trouver une courbe dont la tangente fît un angle constant avec le rayon vecteur; et l'on sait que la Spirale Logarithmique jouit de cette propriété. Seulement, le calcul intégral vient de montrer qu'elle en jouit seule.

Si l'on veut que les trajectoires soient Orthogonales, il faut faire k infini, ce qui réduit l'équation (2) à

$$\frac{df}{dy} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{df}{dx} = 0$$

Dans le cas des courbes

$$y^m = cx^n$$

cette équation devient, après l'élimination de c,

$$mx\,dx + ny\,dy = 0$$

d'où

$$mx^2 + ny^2 = C$$

Si m et n sont de même signe, les courbes proposées sont des Paraboles, et les trajectoires des Ellipses. Si m et n sont de signes contraires, les courbes proposées sont des hyperboles, et les trajectoires sont d'autres hyperboles ayant leurs axes dirigés suivant les asymptotes des premières.

Réciproquement, si l'on cherche les trajectoires orthogonales des courbes représentées par l'équation $mx^2 + ny^2 = C$, on trouve facilement $y^m = cx^n$.

Quelquefois, par certains artifices, on peut ramener à être homogène une équation qui ne l'était pas primitivement. Ce cas se présente par exemple lorsque les coefficients de dx et de dy sont du premier degré. — Soit

$$(mx + ny + p)\,dx + (m'x + n'y + p')\,dy = 0$$

Je change de variable, et je pose

$$\begin{cases} x = x' + \alpha \\ y = y' + \beta \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} dx = dx' \\ dy = dy' \end{cases}$$

et je dispose de α et de β de manière à annuler la partie indépendante de x' et de y', afin de rentrer dans le cas des équations homogènes. Pour cela, il faut poser

$$\begin{cases} m\alpha + n\beta + p = 0 \\ m'\alpha + n'\beta + p' = 0 \end{cases}$$

ces deux équations seront possibles, et la transformation réussira toutes les fois qu'on n'aura pas

$$mn' - m'n = 0$$

Quand cela arrivera, on en tirera

$$n' = \frac{m'n}{m}$$

Reportant cette valeur dans l'équation primitive, elle devient

$$(mx + ny + p)\,dx + \frac{m'}{m}(mx + ny)\,dy + p'dy = 0$$

$$(mx + ny)\left(dx + \frac{m'}{m}dy\right) + p\,dx + p'dy = 0$$

Si maintenant je pose

$$mx + ny = z$$

d'où

$$dy = \frac{dz - m\,dx}{n}$$

et si je reporte dans l'équation, j'aurai

$$z\left(dx + \frac{m'}{m}\cdot\frac{dz - m\,dx}{n}\right) + p\,dx + p'\frac{dz - m\,dx}{n} = 0$$

or x n'entre ici que par sa différentielle, l'éq. est de la forme

$$dx + \varphi(z)\,dz = 0$$

et les variables sont séparées.

Cette substitution de $\frac{m'}{m}n$ à la place de n' deviendrait inexécutable si m était nul. Mais, comme $mn' = m'n$, si $m=0$, on aura $m'=0$ ou $n=0$. — Supposons d'abord $n=0$. Il reste

$$p\,dx + (m'x + n'y + p')\,dy = 0$$

et, en posant comme tout-à-l'heure $m'x + n'y = z$, on arrivera de même à séparer les variables. — Si au contraire $m'=0$ en même temps que $m=0$, alors il n'y a plus d'x dans l'équation, partant, plus de difficulté.

Enfin, si les valeurs de α et de β se présentaient sous la forme $\frac{0}{0}$, on prendrait une valeur quelconque : il n'y a pas de difficulté.

Remarque. — Cette équation

$$(mx + ny + p)\,dx + (m'x + n'y + p')\,dy = 0$$

peut encore être intégrée par une autre méthode. — Posons

$$mx + ny + p = z$$

$$m'x + n'y + p' = t$$

l'équation devient

$$z\,dx + t\,dy = 0$$

reste à remplacer dx et dy par leurs valeurs. Or ces valeurs ne contiennent que dz et dt. Nous arrivons donc ainsi à une équation homogène que nous saurons par conséquent intégrer.

3°. Equation Linéaire.

L'équation linéaire du 1er. ordre est de la forme

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx} + Py = Q$$

P et Q étant des fonctions quelconques de la seule variable x. on sait toujours intégrer une pareille équation.

D'abord, supposons $Q = 0$. alors, l'équation se réduit à

$$\frac{dy}{dx} + Py = 0$$

d'où l'on tire successivement

$$\frac{dy}{y} = -P\,dx$$

$$Ly = -\int P\,dx + Lc$$

$$\frac{y}{c} = e^{-\int P\,dx}$$

Revenons maintenant au cas général, et cherchons à le ramener au précédent. Pour cela, égalons y au produit de deux fonctions indéterminées de x. Posons

$$y = uv$$

d'où

$$dy = u\,dv + v\,du$$

Remplaçant, il vient

$$\frac{u\,dv}{dx} + \frac{v\,du}{dx} + Puv = Q$$

Je puis maintenant poser

$$\begin{cases} Q - v\dfrac{du}{dx} = 0 & (2) \\ \dfrac{dv}{dx} + Pv = 0 & (3) \end{cases}$$

L'équation (1) est donc ramenée au système des équations (2) et (3). or l'Eq. (3) peut être intégrée, et donne

$$v = Ce^{-\int P\,dx}$$

Reportant dans l'équation (2) il vient

$$Q - Ce^{-\int P\,dx}\frac{du}{dx} = 0$$

d'où

$$u = \frac{1}{c}\int e^{\int P dx} Q dx + C'$$

or $y = uv$: donc enfin nous aurons

$$y = C e^{-\int P dx}\left\{\frac{1}{c}\int e^{\int P dx} Q dx + C'\right\}$$

ou bien

$$y = e^{-\int P dx}\left\{\int e^{\int P dx} Q dx + C\right\}$$

car $\frac{C'}{c}$ se réduit à une seule constante arbitraire.

4°. Equation de Bernouilli.

Elle est de la forme

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q y^n$$

En divisant par y^n, on a

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P y^{1-n} = Q$$

Remarquons que $y^{-n}\frac{dy}{dx}$ est, à un facteur près, la dérivée de y^{1-n} : car $\frac{d.y^{1-n}}{dx} = (1-n) y^{-n}\frac{dy}{dx}$. — L'équation donnée peut donc s'écrire ainsi

$$\frac{d.y^{1-n}}{dx} + (1-n)P y^{1-n} = (1-n) Q$$

Elle est donc ramenée au cas précédent, et elle donnera

$$y^{1-n} = e^{(n-1)\int P dx}\left\{C - (n-1)\int e^{-(n-1)\int P dx} Q dx\right\}$$

ou bien

$$y = \frac{1}{\sqrt[n-1]{e^{(n-1)\int P dx}\left\{C-(n-1)\int e^{-(n-1)\int P dx} Q dx\right\}}}$$

5°. Equation d'Euler.

C'est celle-ci :

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^2 + R$$

on peut encore intégrer, pourvu qu'on connaisse à priori une solution particulière de l'équation. — Soit $y = X$ cette solution, de façon qu'on ait

$$\frac{dX}{dx} + PX = QX^2 + R$$

Posons

$$y = X + z$$

et substituons dans l'équation primitive ; elle deviendra

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dz}{dx} + PX + Pz = QX^2 + 2QzX + Qz^2 + R$$

et en réduisant,

$$\frac{dz}{dx} + (P - 2QX)z = Qz^2$$

et l'on est ainsi ramené à un cas particulier de l'équation de Bernouilli : de sorte que la valeur de y sera

$$y = X - \frac{1}{e^{\int(P-2QX)dx}\left\{C - \int e^{-\int(P-2QX)dx} Q dx\right\}}$$

Comme exemples d'équations d'Euler, on peut prendre les suivantes

$$\frac{dy}{dx} + y + y^2 - \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^2 + 2(P - 2Q)$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x} + x^3 - 3x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 2xy^2 + \frac{3}{2}x - x^5$$

Dont les solutions particulières sont

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y = 2$$

$$y = x^2$$

$$y = \frac{x^2}{2}$$

6°. Intégration par la Méthode du Facteur.

Reprenons l'Equation

$$(1) \qquad M dx + N dy = 0$$

Son 1er. membre n'est pas en Général une différentielle exacte : mais on peut toujours l'y ramener en la multipliant par un certain facteur, dont il s'agit de prouver l'existence et de trouver la valeur.

Supposons que $u = c$ soit l'intégrale Générale, u étant fonction d'x et d'y. Différentiant, nous aurons

$$(2) \qquad \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy = 0$$

Cette Equation devra donner pour $\frac{dy}{dx}$ la même valeur que l'Equation (1). Donc on aura identiquement

$$\frac{M}{N} = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)}$$

et c'est bien là une identité : car autrement, cela se réduirait à $\varphi(x,y)=0$, d'où résulterait une relation déterminée entre x et y, ce qui est absurde, puisque $u = c$ est l'intégrale. on aura donc

$$\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{M} = \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{N} = Z$$

$$\frac{du}{dx} = MZ$$

$$\frac{du}{dy} = NZ$$

Donc

$$du = Z\left(Mdx + Ndy\right) = 0$$

Donc en multipliant par Z le 1er. membre de l'Equation (1), on obtient une différentielle exacte, c.q.f.d.

Il suit delà que l'Eq. (1) peut s'écrire

$$\frac{du}{Z} = 0$$

Je vois donc qu'il y a deux manières d'y satisfaire, soit en posant $du=0$, d'où $u=c$, qui est l'intégrale générale, soit en posant $\frac{1}{Z}=0$, solution qui, ou bien sera comprise dans l'autre qui la donnera par une certaine valeur particulière de la constante, ou bien n'y sera pas renfermée, et formera une solution particulière, indépendante de l'autre. Dans ce dernier cas, l'Eq. $\frac{1}{Z}=0$ est dite Solution Singulière, dans l'autre, c'est une Intégrale Particulière.

Maintenant, comment pourra-t-on déterminer ce facteur Z?
on sait que

$$Z(M dx + N dy)$$

est une différentielle exacte. Donc on doit avoir

$$\frac{d.ZM}{dy} = \frac{d.ZN}{dx}$$

ou

$$M\frac{dZ}{dy} + Z\frac{dM}{dy} = N\frac{dZ}{dx} + Z\frac{dN}{dx}$$

ou enfin

$$(1) \qquad M\frac{dZ}{dy} - N\frac{dZ}{dx} + Z\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0$$

Cette équation ne peut être intégrée par les méthodes générales connues: son intégration est regardée comme d'un ordre de difficulté plus élevé que celle de la proposée, à laquelle d'ailleurs on ramène les équations de cette forme. on ne peut le faire que dans des cas particuliers.

Supposons par exemple que Z soit indépendant de y. alors $\frac{dZ}{dy} = 0$. L'Eq. (1) devient

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right)dx$$

et remarquons en effet qu'ici, au lieu de $\frac{dZ}{dx} = H$, on peut écrire $dz = H dx$; car, Z étant indépendant de y, il ne contient plus que la seule variable x: donc dZ peut et doit être regardé comme étant, dans $\frac{dZ}{dx}$, la différentielle totale de Z. – En représentant par X le 2^d. membre, qu'on peut former, et qui doit être indépendant de y (caractère auquel on reconnaîtra d'ailleurs la réalité de notre hypothèse), on aura

$$Z = e^{\int X dx}$$

Il en serait absolument de même si Z pouvait être indépendant de x.

Cette hypothèse se vérifie dans le cas de l'Eq. linéaire, qui

et
$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$
et dans laquelle
$$N = 1$$
$$M = Py - Q$$
alors
$$\frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right)dx = Pdx$$
Donc
$$z = e^{\int Pdx}$$
et en effet, le 1er. membre, qui devient
$$e^{\int Pdx} dy + Pe^{\int Pdx} y dx - e^{\int Pdx} Q dx$$
est alors une différentielle exacte. Car
$$e^{\int Pdx} Q dx = d. \int e^{\int Pdx} Q dx$$
et
$$e^{\int Pdx} dy + Pe^{\int Pdx} y dx = d. ye^{\int Pdx}$$
Donc l'intégrale de l'équation linéaire est
$$ye^{\int Pdx} - \int e^{\int Pdx} Q dx = C$$
d'où la valeur connue
$$y = e^{-\int Pdx}\left\{\int e^{\int Pdx} Q dx + C\right\}$$

L'équation générale qui donne z peut s'écrire autrement. Car l'équation primitive peut se mettre sous la forme
$$dy + Mdx = 0$$
et alors l'éq. en z devient
$$M\frac{dz}{dy} - \frac{dz}{dx} + z\frac{dM}{dy} = 0$$
M étant devenu le rapport des deux coefficients de dx et de dy. — Cette forme montre plus facilement que l'autre qu'il n'y a que les équations linéaires pour lesquelles z puisse être indépendant de y. — admettons en effet que

Z ne contienne que x. alors il reste pour l'Equation ci-dessus :

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{dM}{dy}\,dx$$

$\frac{dM}{dy}$ doit être fonction d'x seul. Je le représente par P. alors

$$\frac{dM}{dy} = P$$

$$M = \int P dy + C = P \int dy + C = Py + Q$$

Q étant également fonction d'x seul : et alors l'Equation $dy + Mdx = 0$ devient

$$\frac{dy}{dx} + Py + Q = 0$$

ce qui démontre bien l'énoncé.

Ce facteur Z, nous l'avions du reste mis en évidence dans les autres méthodes d'intégration que nous avons employées. ainsi, quand on considère l'Equation

$$XY dx + X_1 Y_1 dy = 0$$

on divise par $X_1 Y$: c'est introduire le facteur $\frac{1}{X_1 Y}$.

Dans la théorie des Equations homogènes, nous avons posé (en partant toujours de l'Eq. $Mdx + Ndy = 0$)

$$M = x^m Z$$

$$N = x^m Z_1$$

Z et Z_1 étant des fonctions de $z = \frac{y}{x}$: et alors, en divisant par x^m, l'Equation devient

$$Z dx + Z_1 dy = 0$$

$$Z dx + Z_1 (z dx + x dz) = 0$$

ou bien

$$(Z + Z_1 z) dx + Z_1 x\, dz = 0$$

divisant par $x(Z + Z_1 z)$

$$\frac{dx}{x} + \frac{Z_1}{Z + Z_1 z} dz = 0$$

Donc le facteur introduit est ici

$$\frac{1}{x^m} \cdot \frac{1}{x(Z+Z_1 z)}$$

ou bien

$$\frac{1}{x^{m+1}} \cdot \frac{1}{Z+Z_1 z}$$

ou enfin

$$\frac{1}{Mx+Ny}$$

Donc, M et N étant des fonctions homogènes du même degré, l'expression

$$\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny}$$

est toujours une différentielle exacte.

Cette propriété peut d'ailleurs être trouvée autrement. Posons en effet

$$\frac{M}{Mx+Ny} = M'$$

$$\frac{N}{Mx+Ny} = N'$$

et montrons que $M'dx+N'dy$ est une différentielle exacte, c.à.d. que l'on a

$$\frac{dM'}{dy} = \frac{dN'}{dx}$$

or

$$\frac{dM'}{dy} = \frac{\frac{dM}{dy}(Mx+Ny) - M\left(x\frac{dM}{dy}+N+y\frac{dN}{dy}\right)}{D^2} = \frac{Ny\frac{dM}{dy} - MN - My\frac{dN}{dy}}{D^2}$$

$$\frac{dN'}{dx} = \frac{\frac{dN}{dx}(Mx+Ny) - N\left(x\frac{dM}{dx}+M+y\frac{dN}{dx}\right)}{D^2} = \frac{Mx\frac{dN}{dx} - MN - Nx\frac{dM}{dx}}{D^2}$$

reste à vérifier que

$$Ny\frac{dM}{dy} - My\frac{dN}{dy} = Mx\frac{dN}{dx} - Nx\frac{dM}{dx}$$

ou

$$N\left(y\frac{dM}{dy}+x\frac{dM}{dx}\right) = M\left(x\frac{dN}{dx}+y\frac{dN}{dy}\right)$$

or, à cause d'une propriété connue des fonctions homogènes,

$$N(m.M) = M(m.N)$$

ce qui est vrai. Donc la proposition est démontrée.

Nous venons de nous appuyer ici sur ce que, si

$$V = f(x, y, z)$$

on a

$$mV = x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy} + z\frac{df}{dz}$$

quand l'équation est homogène. — On peut facilement le démontrer. Car, posons

$$\left.\begin{array}{l}\frac{y}{x} = t \\ \frac{z}{x} = u\end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} dy = t\,dx + x\,dt \\ dz = u\,dx + x\,du\end{array}\right.$$

L'équation $V = f(x, y, z)$ devient

$$V = x^m \varphi(u, t)$$

d'où

$$dV = m x^{m-1} \varphi(u,t)\,dx + x^m \left\{ \frac{d\varphi}{du} du + \frac{d\varphi}{dt} dt \right\}$$

Mais on a aussi

$$dV = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}\left\{t\,dx + x\,dt\right\} + \frac{df}{dz}\left\{u\,dx + x\,du\right\}$$

$$dV = dx\left\{\frac{df}{dx} + t\frac{df}{dy} + u\frac{df}{dz}\right\} + \text{etc} = \frac{dx}{x}\left\{x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy} + z\frac{df}{dz}\right\} + \text{etc.}$$

Les deux valeurs de dV devant être identiques, on aura

$$\frac{1}{x}\left\{x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy} + z\frac{df}{dz}\right\} = m x^{m-1}\varphi(u,t)$$

$$x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy} + z\frac{df}{dz} = m\, f(x, y, z)$$

c.q.f.d.

Revenons à l'intégration par le facteur. — Dès qu'on a un facteur Z, on démontre facilement qu'il y en a une infinité. Car l'équation

$$du = Z\,(M\,dx + N\,dy)$$

peut s'écrire

$$\varphi(u)\,du = (M\,dx + N\,dy)\,\varphi(u)\,Z$$

$\varphi(u)\,du$ est une différentielle exacte, donc aussi le

second membre.

Réciproquement, tout facteur propre à rendre le 1er membre une différentielle exacte est compris dans la forme $z\varphi(u)$.

Supposons en effet que, d'une manière quelconque, on en ait trouvé un autre v, de façon qu'on ait

$$v(Mdx+Ndy) = d.V$$

Je dis que $v = z\varphi(u)$. En effet, des deux égalités

$$z(Mdx+Ndy) = du$$

$$v(Mdx+Ndy) = dV$$

on tire

$$\frac{v}{z} = \frac{dV}{du}$$

$$dV = \frac{v}{z}du$$

or, $u=c$ étant une intégrale de la proposée, il s'ensuit que du est toujours nul. D'ailleurs, on voit que dV l'est en même temps. Donc V est constant en même temps que u. Donc V est fonction de u. Donc l'égalité

$$\frac{v}{z} = \frac{dV}{du}$$

devient

$$\frac{v}{z} = \varphi(u)$$

$$v = z\varphi(u) \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Tous les facteurs étant de la forme $z\varphi(u)$, il suit de là que si, par des moyens quelconques, on en a pu trouver deux, v et z, l'équation

$$\frac{v}{z} = c$$

sera l'intégrale générale: car $\frac{v}{z}$ sera une certaine fonction $\varpi(u)$, et poser $\varpi(u)=c$ ou $u=c$, c'est absolument la même chose.

Reprenons maintenant les équations homogènes, et soit

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

une pareille équation. On a vu qu'un facteur propre à rendre le 1er membre une différentielle exacte est

$$z = \frac{1}{Mx+Ny}$$

Supposons maintenant, ce qui peut quelquefois arriver, que $M\,dx + N\,dy$ soit aussi une différentielle exacte, auquel cas on aurait un second facteur $V = 1$. L'intégrale générale sera alors $\frac{V}{z} = C$, c.à.d.

$$Mx + Ny = C$$

Si par exemple on a $x\,dx + y\,dy = 0$, $V = 1$, $z = \frac{1}{x^2+y^2}$, et l'intégrale est $x^2+y^2 = C$.

Ce facteur $z = \frac{1}{Mx+Ny}$ ne peut être introduit si $Mx+Ny = 0$. Mais, si cela arrive, $\frac{M}{N} = -\frac{y}{x}$: alors l'équation primitive devient $x\,dy - y\,dx = 0$ et l'intégrale générale est $y = cx$.

En résumé, on voit que la méthode du facteur est plus curieuse qu'utile, et ne nous a guères appris quelque chose de nouveau.

Équations Différentielles

D'un Degré quelconque en $\frac{dy}{dx}$.

Soit

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

une pareille Équation. D'où peut-elle provenir ?

Remarquons que si l'on a une Équation

$$(1) \qquad f(x, y, c) = 0$$

où c entre à la puissance n, on a, en la Différentiant, l'Éq. Différentielle Immédiate

$$(2) \qquad \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = 0$$

équation qui contient aussi c, et si l'on élimine c entre (1) et (2), on aura l'Équation Différentielle proprement dite. Je dis que cette Éq. contiendra $\frac{dy}{dx}$ à la puissance n. Car l'Éq. (1) peut se mettre sous la forme

$$(3) \qquad (c - f_1)(c - f_2) \dots (c - f_n) = 0$$

et l'Éq. (2)

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, c)$$

Si, de l'Éq. (3) on tire les n valeurs de c pour les porter successivement dans l'Éq. (4), on aura autant de valeurs correspondantes pour $\frac{dy}{dx}$, à savoir

pour $c = f_1$, $\frac{dy}{dx} = \varphi_1$

$c = f_2$ $\frac{dy}{dx} = \varphi_2$

$\vdots$ $\vdots$

$c = f_n$ $\frac{dy}{dx} = \varphi_n$

$\frac{dy}{dx}$ aura donc en général n valeurs : donc l'équation finale en $\frac{dy}{dx}$ sera généralement du degré n, et elle sera

$$\left(\frac{dy}{dx} - q_1\right)\left(\frac{dy}{dx} - q_2\right) \dots \left(\frac{dy}{dx} - q_n\right) = 0$$

Réciproquement, si l'on donne une Eq.

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

où $\frac{dy}{dx}$ entre à la n^e. puissance, il est évident que c devra entrer à une certaine puissance, supérieure à la 1ère, dans l'intégrale

$$F(x, y, c) = 0$$

Actuellement, comment peut-on intégrer une pareille équation ? En général, cela est impossible ; on ne peut le faire que dans quelques cas particuliers, que nous allons passer en revue.

Premier cas.

Il peut arriver, mais cela se présente bien rarement, qu'en résolvant l'équation par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on arrive à une expression directement intégrable.

En voici un exemple. — On donne une infinité de paraboles

$$(1) \quad y^2 = 2px + p^2$$

ayant même foyer et même axe (l'origine est au foyer), et l'on demande les courbes qui les coupent à angle droit.

L'équation différentielle de ces courbes sera évidemment

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{p}{y} = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{p}$$

$$(2) \quad p = -y\frac{dx}{dy}$$

Éliminant p entre les Eq. (1) et (2), on aura l'Eq. différentielle des

problème :

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

ou

$$y\,dy + x\,dx = \pm dx\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\pm\frac{y\,dy + x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = dx$$

ou bien, en intégrant,

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = x + C$$

$$y^2 = C^2 + 2Cx$$

Équation de même forme que la proposée : elle représente aussi une infinité de paraboles ayant leur foyer à l'origine ; seulement, la concavité doit être tournée en sens inverse, afin qu'il y ait intersection, de façon que, si l'on prend $p > 0$, il faudra prendre $C < 0$, et inversement.

2e. Cas.

Supposons que $\frac{dy}{dx}$ entre seul dans l'éq. donnée,

$$f\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Supposons encore que nous puissions résoudre : nous aurons

$$\frac{dy}{dx} = \alpha$$

$$\frac{dy}{dx} = \alpha'$$

$$\frac{dy}{dx} = \alpha''$$

$$\vdots$$

et, en intégrant séparément

$$y - \alpha x - c = 0$$

$$y - \alpha' x - c = 0$$

$$y - \alpha'' x - c = 0\,,$$

$$\vdots$$

en mettant partout la même constante, ce qui n'altère en rien la généralité des résultats. — L'intégrale générale

sera donc

$$(y-\alpha x-c)(y-\alpha' x-c)(y-\alpha'' x-c)\ \ldots\ =0$$

ou bien

$$\left(\frac{y-c}{x}-\alpha\right)\left(\frac{y-c}{x}-\alpha'\right)\left(\frac{y-c}{x}-\alpha''\right)\ \ldots\ =0$$

ce qui montre que, pour obtenir cette équation, il suffit de remplacer, dans la proposée, $\frac{dy}{dx}$ par $\frac{y-c}{x}$.

3e. Cas.

on peut examiner le cas où $\frac{dy}{dx}$ entre dans l'Eq. avec une seule des variables. Soit

$$f\left(\frac{dy}{dx}, x\right)=0$$

si l'on peut résoudre par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on aura une ou plusieurs valeurs de la forme $dy=\varphi(x)dx$, et le problème sera ramené à une ou plusieurs quadratures.

Si l'on ne peut pas résoudre par rapport à $\frac{dy}{dx}$, mais qu'on puisse le faire par rapport à x, on aura

$$(1)\qquad x=F(p)$$

en posant

$$(2)\qquad dy=p\,dx$$

différentiant l'Eq. (1), on aura

$$dx=F'(p)dp$$

L'Eq. (2) devient alors

$$dy=pF'(p)dp$$

d'où

$$(3)\qquad y=\int pF'(p)dp+C$$

et si maintenant on peut éliminer p entre l'Eq. (3) et la proposée, le problème sera résolu.

L'Eq. (3) peut se présenter sous une autre forme. — Car l'Eq. (2) donne

$$y = \int p\,dx + C = px - \int x\,dp + C$$

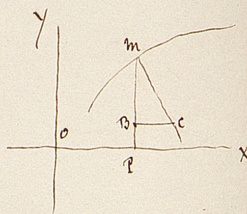
et, en substituant,

$$(3) \qquad y = px - \int F(p)\,dp + C$$

Si l'Equation ne contenait que y et $\frac{dy}{dx}$, ce serait absolument la même chose.

Voici un exemple qui rentre dans ce cas.

On demande la courbe telle que, m étant un point quelconque, mC la normale, mP l'ordonnée; prenant sur l'ordonnée $mB = a$, et menant BC parallèle à OX; on ait $OP + BC = mC$.



L'Equation différentielle se trouve immédiatement, c'est

$$x + a\frac{dy}{dx} = \sqrt{a^2 + a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ou

$$(1) \qquad x + ap = a\sqrt{1+p^2}$$

on peut résoudre par rapport à p: car, en élevant au carré, on a

$$x^2 + a^2p^2 + 2apx = a^2 + a^2p^2$$

$$p = \frac{a^2 - x^2}{2ax}$$

on a donc, pour l'intégrale cherchée

$$y = \int \frac{a^2 - x^2}{2ax}\,dx + C = \frac{a}{2}\int\frac{dx}{x} - \frac{1}{2a}\int x\,dx + C = \frac{a}{2}Lx - \frac{x^2}{4a} + C = \frac{1}{4a}\left(2a^2 Lx - x^2 + C\right)$$

$$(2) \qquad x^2 + 4ay = 2a^2 Lx + C$$

c'est l'Eq. Générale Cherchée.

Au lieu de résoudre l'Eq. (1) par rapport à p, on peut la résoudre par rapport à x. On a alors

$$x = -ap + a\sqrt{1+p^2}$$

$$dx = -a\,dp + \frac{ap\,dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

or $y = \int p\,dx$: donc

$$y = -a\int p\,dp + a\int\frac{p^2\,dp}{\sqrt{1+p^2}} + C = -a\frac{p^2}{2} + a\int\frac{p^2\,dp}{\sqrt{1+p^2}} + C$$

Maintenant, on a

$$(2) \qquad \int\frac{p^2\,dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int\left\{\frac{p^2\,dp + dp - dp}{\sqrt{1+p^2}}\right\} = \int dp\sqrt{1+p^2} - \int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

or

$$\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = L\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) \quad \text{et} \quad \int dp\sqrt{1+p^2} = p\sqrt{1+p^2} - \int\frac{p^2\,dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

Substituant ces valeurs dans l'Eq. (2), on a

$$\int\frac{p^2\,dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2} - \frac{1}{2}L\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) + C$$

reportant dans la valeur de y

$$y = \frac{p}{2}\left(-ap + a\sqrt{1+p^2}\right) - \frac{a}{2}L\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) + C$$

et, à cause de la valeur d'x,

$$y = \frac{px}{2} - \frac{a}{2} \mathcal{L}\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) + C$$

reste à éliminer p entre cette Éq. et la proposée. or, celle-ci donne $p = \frac{a^2 - x^2}{2ax}$. donc

$$y = \frac{a^2 - x^2}{4a} - \frac{a}{2} \mathcal{L}\left\{\frac{a^2 - x^2 + \sqrt{4a^2x^2 + a^4 + x^4 - 2a^2x^2}}{2ax}\right\} + C = \frac{a^2 - x^2}{4a} - \frac{a}{2} \mathcal{L}\frac{a}{x} + C$$

$$4ay + x^2 = a^2 - 2a^2 \mathcal{L}\frac{a}{x} + C = a^2 - 2a^2 \mathcal{L}a + 2a^2 \mathcal{L}x + C = 2a^2 \mathcal{L}x + C'$$

c'est bien la même Éq. qu'on avait obtenue autrement.

6e. Cas.

Une des variables n'entre qu'au 1er. degré. — on a par exemple :

$$y = f(x, p)$$

en posant

$$dy = p\,dx$$

différentions :

$$dy \text{ ou } p\,dx = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dp}dp$$

$$\left(p - \frac{df}{dx}\right)dx - \frac{df}{dp}dp = 0$$

Équation qui est de la forme $Mdx + Ndy = 0$, et il pourra arriver que l'on sache l'intégrer. on l'intégrera donc, et l'on éliminera p entre l'intégrale et l'Éq. primitive.

7e. Cas.

Les deux variables peuvent entrer au 1er. degré. on aura alors

$$y = Mx + N$$

M et N ne contenant que $\frac{dy}{dx}$. on posera encore $dy = p\,dx$. on différentiera :

$$p\,dx = M\,dx + x\frac{dM}{dp}dp + \frac{dN}{dp}dp$$

$$(p - M)\,dx - \left(x\frac{dM}{dp} + \frac{dN}{dp}\right)dp = 0$$

Équation qui est toujours de la forme $Mdx + Ndy = 0$; mais de plus, elle est linéaire ; car elle peut s'écrire

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\frac{dM}{dp}}{p - M}x - \frac{\frac{dN}{dp}}{p - M} = 0$$

on pourra donc toujours l'intégrer, et l'on n'aura plus qu'à éliminer p.

Dans ce cas, l'équation peut avoir la forme particulière

$$y = px + f(p)$$

alors on aura

$$dy \text{ ou } pdx = pdx + xdp + f'(p)dp$$

$$dp\{x + f'(p)\} = 0$$

Il y a donc deux solutions : d'abord

$$dp = 0$$

$$p = C$$

Reportant dans l'Eq. primitive, on voit que l'intégrale générale

$$y = Cx + f(C)$$

s'obtient ici par une simple substitution : elle représente une infinité de droites.

Au lieu d'agir comme il vient d'être fait, on eût pu être conduit à se dire : $p = c$, c'est $\frac{dy}{dx} = c$, c'est $dy = cdx$: on peut donc intégrer, et l'on aura $y = cx + c'$. La présence de deux constantes annonce la fausseté du raisonnement. Cela tient à ce que nous avons différentié une équation en p : nous avons ainsi formé une Eq. différentielle du 2^d. ordre, et c'est elle que nous intégrerions en agissant ainsi : tel n'est pas notre but.

À présent, on peut encore poser :

$$(2) \qquad x + f'(p) = 0$$

et, par l'élimination de p, j'aurai une solution de l'Eq. proposée. Si (ce qui serait assez singulier) on avait du doute sur la réalité de ce résultat, on pourrait s'en convaincre de la manière suivante : Prenons deux équations

$$\begin{cases} x + f'(z) = 0 \\ y = zx + f(z) \end{cases}$$

z étant quelconque, et éliminons z. Pour cela, différentions

la seconde :

$$\frac{dy}{dx} = z + \left\{ x + f'(z) \right\} \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = z$$

reportons dans la seconde équation ; il vient

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

c'est l'équation proposée, qui est donc bien réellement satisfaite par le système précédent.

L'équation finale provenant de ce système

$$\begin{cases} x + f'(p) = 0 \\ y = px + f(p) \end{cases}$$

ne contient pas de constante. En général, elle ne peut se déduire de l'intégrale générale. Car l'équation $x + f'(p) = 0$ donne $p = \chi(x)$ de sorte que l'équation finale est $y = x\chi(x) + f(\chi(x))$ équation qu'on ne peut, en particularisant la constante, déduire de l'intégrale générale $y = cx + f(c)$. alors, on a une solution singulière. — Si pourtant $\chi(x) = a$, on n'a plus qu'une intégrale particulière. Il en est de même si $f'(p) = a$. Car alors l'Eq. $x + f'(p) = 0$ devient $x + a = 0$, elle est elle-même l'Eq. finale ; mais elle prouve que $f(p) = ap + b$; donc $f(c) = ac + b$; donc l'intégrale générale est $y = cx + ac + b$, ou $\frac{y}{c} = x + a + \frac{b}{c}$; et, si $c = \infty$, il reste $x + a = 0$: ce n'est donc là qu'une intégrale particulière, en ce sens qu'elle se déduit de l'intégrale générale quand on donne à la constante une valeur infinie.

On peut remarquer que la solution qui nous occupe s'obtient en éliminant p entre les équations $x + f'(p) = 0$, $y = px + f(p)$;

c'est la même chose que d'éliminer c entre $y = cx + f(c)$ et $x + f'(c) = 0$, dérivée de la précédente par rapport à c. Donc cette solution représentera l'enveloppe des courbes données par l'intégrale générale.

Exemple. — Quelles sont les courbes telles que les perpendiculaires abaissées de l'origine sur les tangentes ont une longueur constante a ?

L'éq. de la tangente au point x, y étant $Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$, l'éq. différentielle du problème sera

$$a = \frac{-y + x\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$$y\,dx - x\,dy = -a\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$y = x\frac{dy}{dx} - a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

L'intégrale générale sera donc

$$y = cx - a\sqrt{1 + c^2}$$

elle représente une suite de droites. — Pour avoir l'intégrale singulière, éliminons c entre les deux équations

$$y = cx - a\sqrt{1 + c^2} \qquad x - \frac{ac}{\sqrt{1 + c^2}} = 0$$

La seconde donne $x^2 + c^2x^2 = a^2c^2$, $c^2 = \frac{x^2}{a^2 - x^2}$. Reportant dans la 1ère, il vient

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} - a\sqrt{\frac{a^2 - x^2 + x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$y^2(a^2 - x^2) = (x^2 - a^2)^2 = (a^2 - x^2)^2$$

$$y^2 = a^2 - x^2$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

c'est l'éq. du cercle qui a l'origine pour centre et a pour rayon. C'est la solution singulière du problème. — Quant à l'intégrale générale, elle représente toutes les tangentes à ce cercle : car on sait que $y = mx \pm R\sqrt{m^2 + 1}$ est l'éq. générale de la tangente dont le coefficient angulaire est m.

Sur les Solutions Singulières.

Quelques observations générales sur ces solutions viennent se placer ici tout naturellement.

On sait que ces solutions, celles au moins qui sont des solutions singulières proprement dites, ne peuvent se déduire de

l'intégrale Générale par une valeur particulière donnée à la constante. – Toutefois, nous allons voir qu'il est possible de les déduire de cette intégrale Générale, d'une autre manière.

Supposons une Eq. Différentielle

$$(1)\quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Soit

$$(2)\quad F(x, y, c) = 0$$

l'Intégrale Générale, et

$$(3)\quad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0$$

l'Eq. Différentielle immédiate, de façon qu'en éliminant c entre les Eq. (2) et (3), on retrouve identiquement l'Eq. proposée (1).

Si dans l'Eq. (2), je remplace c par une fonction arbitraire φ d'x et d'y, l'Eq. résultante

$$(4)\quad F(x, y, \varphi) = 0$$

sera propre à représenter toute espèce de relation déterminée entre x et y. Donc cette Equation comprend l'intégrale Générale et les Solutions singulières de la proposée. – Seulement, il faut disposer de φ de manière que l'Eq. (4) satisfasse réellement l'Eq. (1). – Je différentie l'Eq. (4). Il vient

$$(5)\quad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = 0$$

$\frac{d\varphi}{dx}$ étant la dérivée totale de φ par rapport à x. – Les Equations (3) et (5) me donnent

l'Eq. (3) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}$$

l'Eq. (5) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)} - \frac{\frac{dF}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}{\frac{dF}{dy}}$$

Je remarque que ces deux valeurs doivent être identiques. Or, tirer φ de l'Eq. $F(x,y,\varphi)=0$ pour le reporter dans le rapport

$$\frac{\frac{dF(x,y,\varphi)}{dx}}{\frac{dF(x,y,\varphi)}{dy}}$$ et tirer c de $F(x,y,c)=0$ pour le porter dans $$\frac{\frac{dF(x,y,c)}{dx}}{\frac{dF(x,y,c)}{dy}}$$

ce sont deux choses qui donneront absolument le même résultat. D'ailleurs la 1ère valeur de $\frac{dy}{dx}$ se réduit, par hypothèse, à $f(x,y)$. Donc, pour que la valeur de φ tirée de l'Eq. (4) soit convenable, il faut et il suffit qu'elle rende nul le terme $\frac{1}{\frac{dF}{dy}} \times \frac{dF}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$. Donc, pour avoir toutes les Intégrales de l'Eq. différentielle proposée, il suffit d'éliminer φ entre les deux Equations

$$(A)\quad \begin{cases} \dfrac{\frac{dF}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}{\frac{dF}{dy}}=0 \\ F(x,y,\varphi)=0 \end{cases}$$

Le Système de ces deux Equations se décompose en deux autres, savoir:

$$(B)\quad \begin{cases} F(x,y,\varphi)=0 \\ \dfrac{\frac{dF}{d\varphi}}{\frac{dF}{dy}}=0 \end{cases} \qquad (C)\quad \begin{cases} F(x,y,\varphi)=0 \\ \left(\dfrac{d\varphi}{dx}\right)=0 \end{cases}$$

or, dans le Système (C), l'Eq. $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)=0$ donne $\varphi=$ Const. Donc l'Equation finale est

$$F(x,y,c)=0$$

on retombe ainsi sur l'Intégrale Générale. — Reste le Système (B), qui se décompose lui-même en deux autres

$$(D)\quad \begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ \dfrac{dF}{dc}=0 \end{cases} \qquad (E)\quad \begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ \dfrac{1}{\frac{dF}{dy}}=0 \end{cases}$$

en changeant y en c, ce qui ne fait rien ; et il reste à éliminer c dans chacun de ces systèmes.

Remarquons ici que, quelque forme qu'on donne à l'équation $F(x,y,c)=0$, le résultat est le même. — Or il peut arriver qu'on puisse la mettre sous la forme $y-\pi(x,c)=0$, auquel cas $\frac{dF}{dy}=1$; et alors le système (E) ne donne plus rien. — Si au contraire l'intégrale est mise sous cette forme $c-\psi(x,y)=0$, c'est le système (D) qui est inadmissible. alors, toutes les solutions singulières sont fournies par le système (E) qui devient

$$\left\{\begin{array}{l} c-\psi(x,y)=0 \\ \dfrac{1}{\frac{d\psi}{dy}}=0 \end{array}\right.$$

et alors, c'est la dernière équation qui est elle-même la solution singulière. — Du reste, ce résultat n'est pas nouveau. On a vu que, si l'on a une équation dont $u=c$ est l'intégrale générale, si z est un facteur propre à rendre le 1er membre une différentielle exacte, l'éq. peut s'écrire $\frac{du}{z}=0$; par suite, qu'il y a deux manières d'y satisfaire : soit en posant $du=0$, d'où $u=c$, soit en posant $\frac{1}{z}=0$. D'ailleurs, $Mdx+Ndy=0$ étant l'équation proposée, on a généralement $z=\frac{1}{N}\cdot\frac{du}{dy}$. Donc $\frac{1}{z}=\frac{N}{\frac{du}{dy}}$. Or ici l'Éq. est $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ $N=1$, donc $\frac{1}{z}=0$ c'est $\frac{1}{\frac{du}{dy}}=0$.

Laissons maintenant de côté le système (E) que nous pouvons toujours, au moins théoriquement, supposer impossible, et revenons au système (D). — La forme des deux équations qui le composent montre que la solution singulière est l'enveloppe des courbes que représente l'intégrale générale.

Il ne faudrait pas croire que toutes les solutions de ce

systèmes fussent nécessairement des Solutions singulières. Tout ce que l'on peut affirmer, c'est que, s'il y a des Solutions singulières, elles sont comprises dans celles-là. — Supposons par exemple que l'intégrale générale soit

$$y = X + c(x-c)^2$$

La dérivée par rapport à c sera

$$0 = (x-c)(x-3c)$$

une des valeurs de c est $c = x$: reportant, il vient $y = X$: ce n'est pas là une Solution singulière, puisqu'on l'obtient en faisant $c = 0$ dans l'intégrale générale. Mais la valeur $c = \frac{x}{3}$, d'où $y = X + \frac{4x^3}{27}$, fournirait une Solution singulière.

Comment donc pourra-t-on reconnaître si l'on a une Solution singulière ou seulement une Intégrale particulière ? Imaginons que l'élimination de c ait conduit au résultat $\Pi(x,y) = 0$. Est-ce une Solution singulière ? Éliminons y entre cette éq. et l'intégrale générale. Nous aurons $\varphi(x,c) = 0$. Si de là on peut tirer une valeur constante pour c, $c = a$, $\Pi(x,y) = 0$ ne sera qu'une intégrale particulière. Si au contraire on n'a que des valeurs de la forme $c = \chi(x)$, on a une vraie Solution singulière.

Si l'intégrale est

$$M + cN = 0$$

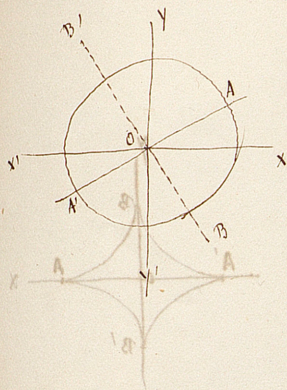
l'application de la méthode donne

$$N = 0$$

ce n'est pas là une Solution singulière, puisqu'on l'obtient en faisant c infini dans l'intégrale générale. — Si $c = 0$, on a $M = 0$, c'est aussi une Intégrale particulière. — Il est évident qu'alors toutes les courbes représentées par l'intégrale générale passent par les points communs aux courbes $M = 0$, $N = 0$.

Si par exemple on a

$$(y^2+x^2-a^2)+c(y-bx)=0$$



tous les cercles que représente cette intégrale passent aux points A et A' où se coupent le cercle $y^2+x^2=a^2$ et la droite $y=bx$. Le lieu des centres de ces cercles est BOB', perp. sur AA'. On voit bien ici que, si le rayon augmente indéfiniment, la droite AA' devient la limite de ces cercles.

On conçoit très-bien qu'il y a des cas où il n'y a pas de solution singulière. Si par exemple l'intégrale est de la forme

$$y=ax+c$$

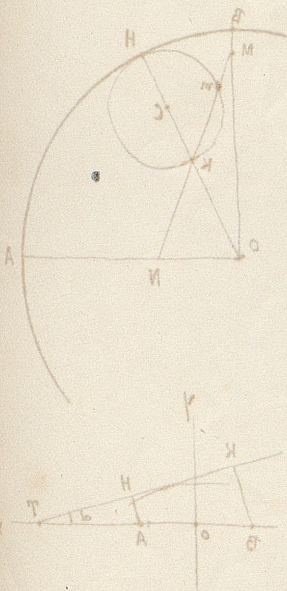
elle représente une suite de parallèles qui n'ont pas d'enveloppe. De même si l'on a

$$x^2+y^2=c$$

$$y=x^2-cx+c$$

etc.

Exemples.



On demande la courbe telle que la partie de ses tangentes interceptée entre les axes coordonnés est constamment égale à a.

L'Eq. de la tangente est $Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$. Elle me donne, pour $X=0$, $Y_0=y-x\frac{dy}{dx}$ et, pour $Y=0$, $X_0=x-y\frac{dx}{dy}$. L'Eq. différentielle est donc

$$\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(x-y\frac{dx}{dy}\right)^2=a^2 \quad \text{ou} \quad \left(y-x\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)^2=a^2$$

$$y=px+\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$$

L'intégrale est donc

$$(1)\qquad y=cx+\frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}$$

Elle représente une suite de droites, qui sont les tangentes elles-mêmes. – La vraie solution du problème sera donnée par la solution singulière, c.a.d. l'enveloppe de ces droites. – Différentiant l'Eq. (1) par rapport à c, on a

$$0=x+\frac{a\sqrt{1+c^2}-\frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}}{1+c^2} \quad \text{ou} \quad (2)\qquad x+\frac{a}{(1+c^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

Reste à éliminer c entre les Eq. (1) et (2). – Or l'Eq. (2) donne $(1+c^2)^{\frac{1}{2}}=-\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$. L'Eq. (1) se simplifie donc, et devient

$$y = cx - ca^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$$

D'où

$$c = \frac{y}{x - a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}} = \frac{y}{x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)}$$

Reportant cette valeur dans l'Eq. (2), on a

$$x + \frac{a}{\left\{1 + \frac{y^2}{x^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)^2}\right\}^{\frac{3}{2}}} = 0$$

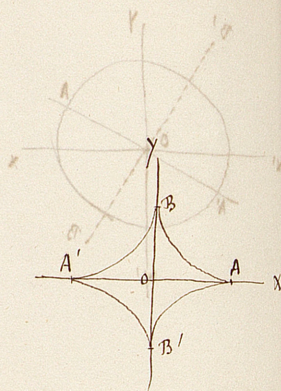
D'où l'on tire successivement

$$x\left\{1 + \frac{y^2}{x^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)^2}\right\}^{\frac{3}{2}} + a = 0, \quad x^{\frac{2}{3}}\left\{1 + \frac{y^2}{x^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)^2}\right\} = a^{\frac{2}{3}}, \quad x^{\frac{2}{3}} + \frac{y^2}{\left(x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)^2} - a^{\frac{2}{3}} = 0$$

$$\left(x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)^2\left(x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right) = -y^2, \quad \left(x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)^3 = -y^2$$

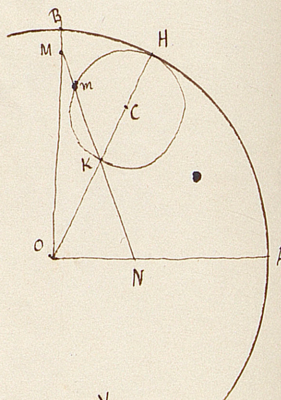
enfin

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$



Cette courbe est un cas particulier de la développée de l'Ellipse. Elle a à peu près la forme ci-contre: $OA = OA' = OB = OB' = a$: les axes coordonnés et leurs deux bissectrices sont des axes de symétrie de la courbe.

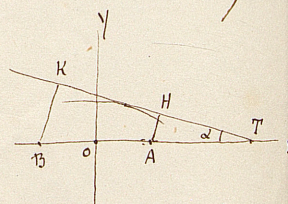
Cette courbe peut être engendrée d'un mouvement continu par un point quelconque d'un cercle de rayon $\frac{1}{4}a$ roulant intérieurement dans un cercle de rayon a. — Il est facile de le démontrer. — Considérons un point m quelconque de cette épicycloïde, et joignons mK. L'arc $mH = BH$. D'ailleurs $OH = 4.CH$. Donc angle $BOH = \frac{1}{2} mKH$. D'autre part, on a visiblement $mKH = MOK + OMK$. Donc $OMK = MOK$. Donc $MK = KO = \frac{1}{2}a$. — MON étant d'ailleurs un triangle rectangle, puisque $MK = OK$, on a aussi $OK = KN = \frac{1}{2}a$. Donc MN est constamment égal à a. Donc la droite MN constante, en glissant sur les côtés de l'angle des axes, passe constamment par un des points de l'Epicycloïde: donc cette Epicycloïde est bien le lieu des intersections successives de la droite MN.



Autre Exemple. — On demande une courbe telle que le produit des perpendiculaires abaissées de deux points fixes sur les tangentes soit constant.

Soit BHT une tangente. On doit avoir $AH.BK = b^2$. — Désignons par c la distance $OA = OB$. On a $AH.BK = AT.BT\sin^2\alpha$. Or $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$, donc $\operatorname{tg}\alpha = p$ et $\sin^2\alpha = \frac{p^2}{1+p^2}$. — Maintenant, l'Eq. de la tangente étant $Y - y = p(X - x)$ pour $Y = 0$ on trouve $X_0 - x = -\frac{y}{p}$, X_0 ou $OT = x - \frac{y}{p}$. D'ailleurs, évidemment $AT.BT = OT^2 - c^2$. Donc l'Eq. du problème est

$$\left\{\left(x - \frac{y}{p}\right)^2 - c^2\right\}\frac{p^2}{1+p^2} = b^2$$



Si la tangente avait passé entre les deux points A et B, on aurait eu $AT.BT = c^2 - OT^2$ de façon que l'Eq. du problème est plus généralement

$$\frac{(y - px)^2 - p^2c^2}{1+p^2} = \pm b^2$$

D'où l'on tire

$$y = px + \sqrt{p^2(c^2 \pm b^2) \pm b^2}$$

Donc l'intégrale est, en désignant par k la constante,

$$(1) \quad y = kx + \sqrt{k^2(c^2 \pm b^2) \pm b^2}$$

C'est la suite des tangentes elles-mêmes. Cherchons la solution singulière. — L'Eq. (1) différentiée donne

$$(2) \quad 0 = x + \frac{k(c^2 \pm b^2)}{\sqrt{k^2(c^2 \pm b^2) \pm b^2}}$$

En posant $c^2 \pm b^2$, ces deux équations deviennent plus simplement

$$\begin{cases} y = kx + \sqrt{a^2k^2 \pm b^2} & (1) \\ x + \dfrac{a^2k}{\sqrt{a^2k^2 \pm b^2}} = 0 & (2) \end{cases}$$

Reste à éliminer k. Or la 2e. Eq. donne

$$(2) \quad \sqrt{a^2k^2 \pm b^2} = -\frac{a^2k}{x}, \quad a^2x^2k^2 \pm b^2x^2 = a^4k^2, \quad k^2 = \frac{\pm b^2x^2}{a^4 - a^2x^2}$$

D'ailleurs, si je reporte dans l'Eq. (1) la valeur (2) du radical qui y entre, j'aurai

$$y = kx - \frac{a^2k}{x} \qquad xy = kx^2 - a^2k \qquad k^2 = \frac{x^2y^2}{(x^2-a^2)^2}$$

Égalant les deux valeurs de k^2, j'aurai

$$\frac{\pm b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)} = \frac{x^2y^2}{(a^2-x^2)^2} \qquad \frac{\pm b^2}{a^2} = \frac{y^2}{a^2-x^2}$$

$$a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2$$

Ce qui donne soit une ellipse, soit une hyperbole. Ces courbes sont donc les seules qui jouissent de la propriété énoncée. On aura une hyperbole ou une ellipse suivant que la tangente passera ou non entre les deux points donnés A et B.

Equations Différentielles d'ordre Quelconque.

Commençons par quelques considérations Générales que nous avions ajournées jusqu'ici.

Si l'on différentie m fois une Equation de la forme

$$y = f(x, c_1, c_2, c_3 \dots c_m) \qquad (1)$$

on aura

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x\ c_1 \dots\dots c_m) \qquad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f_2(x\ c_1 \dots\dots c_m) \qquad (3)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = f_{m-1}(x\ c_1 \dots c_m) \qquad (m)$$

$$\frac{d^my}{dx^m} = f_m(x, c_1, c_2 \dots c_m) \qquad (m+1)$$

Maintenant, des m premières Equations, on peut tirer les valeurs des m constantes, et les porter dans la $(m+1)^e$. alors évidemment on aura un résultat tel que

$$\frac{d^my}{dx^m} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)$$

C'est là une Equation Différentielle de l'ordre m. On appelle Equation Différentielle de l'ordre m, une Equation qui provient de l'élimination de m constantes dans une Equation donnée. — Toutefois, nous avons supposé que l'on pouvait résoudre les m premières Equations par rapport aux m constantes qui y entrent: cela revient à dire que ces Equations n'offrent pas

d'incompatibilités, de telle sorte que si nous attribuons à x une valeur arbitraire a, nous pourrons prendre arbitrairement $y = b$, $\frac{dy}{dx} = b'$, $\frac{d^2y}{dx^2} = b''$, .. $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = b^{(m-1)}$, et obtenir des valeurs finies pour les constantes $c_1, c_2, \ldots c_m$. Toutes les fois qu'il en est ainsi, l'élimination des constantes conduit réellement à une Equation différentielle d'ordre m, Eq. qui d'ailleurs est toujours la même, quel que soit le mode d'élimination que l'on ait employé. Car, si l'on pouvait trouver deux Equations différentielles distinctes, on pourrait, entre ces deux Equations, éliminer $\frac{d^my}{dx^m}$, ce qui conduirait à une relation $\pi(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}) = 0$ impossible, puisque toutes les variables qui y entrent sont supposées pouvoir être prises à volonté.

Réciproquement, supposons qu'on nous donne une Eq. différentielle du m^e ordre

$$(1) \quad \frac{d^my}{dx^m} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)$$

l'intégrale, si elle existe, devra, pour avoir la même généralité, renfermer m constantes arbitraires, de telle manière que, pour $x = a$, on puisse prendre à volonté $y = b$, $\frac{dy}{dx} = b'$, .. $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = b^{(m-1)}$ et en tirer des valeurs correspondantes pour les constantes. En effet, supposons (sauf à le démontrer plus tard) qu'il existe une intégrale : — l'Eq. (1) qui m'est donnée, et seule donnée, me permet de prendre à volonté, pour $x = a$, $y = b$, $\frac{dy}{dx} = b'$, $\frac{d^2y}{dx^2} = b''$, .. $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = b^{(m-1)}$, et alors seulement l'Eq. (1) me donnera la m^e dérivée $\frac{d^my}{dx^m}$, et par suite évidemment toutes les autres : et en effet, si je pose pour abréger

$$\frac{dy}{dx} = y' \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = y'' \quad \ldots \quad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = y^{m-1} \qquad \frac{d^my}{dx^m} = y^m$$

l'Eq. (1) me donnera

$$(3)\quad \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y' + \frac{dF}{dy'}\cdot y'' + \cdots + \frac{dF}{dy^{(m-1)}}\,y^m$$

y^m est le 2. membre de l'Eq. (1). Donc, si je me donne $x, y, y', y'', \ldots y^{m-1}$, y^m et y^{m+1} s'ensuivent; - et il est évident qu'on trouverait de même toutes les dérivées suivantes. - L'Intégrale devra donc contenir m constantes arbitraires, et seulement m, de façon qu'on puisse bien prendre à volonté, pour $x=a$, y et les $(m-1)$ premières dérivées.

Cela posé, démontrons qu'il existe réellement une Intégrale. On nous donne l'Eq. différentielle

$$(1)\quad y^{(m)} = F(x, y, y', y'', \ldots y^{(m-1)})$$

Remarquons actuellement que toute fonction d'x, $y=\varphi(x)$, peut s'écrire

$$(2)\quad y = \varphi(a) + (x-a)\varphi'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}\varphi''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}\varphi^{(m-1)}(a) + \frac{(x-a)^m}{1.2\ldots m}\varphi^{(m)}(a) + \cdots$$

pourvu qu'aucune dérivée ne soit infinie, et l'on peut en général choisir a de manière que cela n'arrive pas; et la série est toujours convergente quand x est suffisamment voisin de a: souvent même il arrivera que la série sera convergente quel que soit x. - Supposons que nous voulions imposer à l'Eq. (2) la condition de satisfaire à l'Eq. différentielle proposée (1). Pour cela, il faudra que, pour $x=a$, nous puissions prendre à volonté $y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$, c.a.d. $\varphi(a), \varphi'(a) \ldots \varphi^{m-1}(a)$. Nous prendrons donc arbitrairement $\varphi(a)=b$, $\varphi'(a)=b'$, .. $\varphi^{(m-1)}(a)=b^{(m-1)}$. De plus, il faudra que $\varphi^{(m)}(a)$ et toutes les autres dérivées ne soient pas arbitraires, mais prennent les valeurs que l'on déduirait de l'Eq. (1). En d'autres termes, on devra avoir

$$\varphi^{(m)}(a) = F(a, b, b', b'', \ldots b^{(m-1)})$$

de Tradition $y^{(m+1)}(a)$ = la valeur de $y^{(m+1)}$ tirée de l'Equation (1), et dans laquelle on remplacerait x par a, et ainsi de suite. — Toutes ces substitutions faites, l'Eq. (2) ne donnera y en fonction d'x et des m constantes arbitraires $b, b', b'', \ldots b^{(m-1)}$.

Je dis maintenant que cette Equation sera l'intégrale cherchée, et que toutes les conditions, précédemment exprimées comme nécessaires, sont aussi suffisantes. En effet, si nous remarquons que l'Eq. (1) après le remplacement de $y^{(m)}$ par sa valeur tirée de l'Eq. (1), était de la forme $y^{(m+1)} = F_1(x, y, b, b' \ldots b^{(m-1)})$, et que de même on aurait $y^{(m+2)} = F_2(x, y, b, b' \ldots b^{(m-1)})$, et ainsi de suite, — cette Eq. (2) devient

$$(2)\quad y = b + (x-a)b' + \frac{(x-a)^2}{1.2}b'' + \ldots + \frac{(x-a)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}b^{(m-1)} + \frac{(x-a)^m}{1.2\ldots m}F(a, b, b' \ldots b^{m-1})$$
$$+ \frac{(x-a)^{m+1}}{1.2\ldots(m+1)}F_1(a, b, b' \ldots b^{m-1})$$
$$+ \frac{(x-a)^{m+2}}{1.2\ldots(m+2)}F_2(a, b, b' \ldots b^{m-1})$$
$$+ \text{etc.}$$

et il est facile de voir que c'est l'intégrale générale. Car, d'abord, si l'on prend les dérivées successives, et qu'on y fasse $x = a$, on trouve

$$y = b \quad \frac{dy}{dx} = b' \quad \frac{d^2y}{dx^2} = b'' \ldots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = b^{m-1}$$

toutes quantités arbitraires; puis, différentiant encore, et faisant $x = a$ dans le résultat:

$$\frac{d^m y}{dx^m} = F(a, b, b', \ldots b^{m-1}) \quad \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} = F_1(a, b, b' \ldots b^{m-1}) \quad \frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}} = F_2(a, b, b' \ldots b^{m-1}) \text{ etc}$$

tous les mêmes résultats que donnerait l'Eq. différentielle proposée. Donc enfin l'Eq. (2) est bien l'intégrale générale de la proposée, en ce sens qu'elle est la solution la plus générale que celle-ci puisse admettre.

Est-ce à dire pour cela que l'Eq. (2) contient toutes les solutions de l'Eq. (1)? non certes, et l'Eq. donnée peut admettre des solutions de la forme

$$y = \varphi(x, k_1, k_2, \dots k_l) \qquad l < m$$

lesquelles sont les Intégrales générales d'Equations différentielles d'un ordre moins élevé que la proposée, qu'on obtiendrait en éliminant les l constantes qui y entrent, et qui seraient de la forme

$$\pi(x, y, y', y'' \dots y^{(l)}) = 0$$

Comment peut-il arriver que ces solutions ne rentrent pas dans l'Eq. (2) ? C'est qu'elles ne sont pas développables par la Série de Taylor, parce qu'elles rendent infinis un ou plusieurs coefficients de cette Série. — Et en effet, l'Eq. φ permet de prendre arbitrairement, pour $x = a$, y et les $l-1$ premières dérivées ; mais la $l^{ème}$ et toutes les autres, en particulier la l^e, la $(l+1)^e$ ... jusqu'à la $(m-1)^e$, ne sont plus arbitraires, et s'expriment en fonction des $(l-1)$ premières et d'x et d'y. On conçoit d'après cela que, dans les fonctions déterminées F F_1 F_2 .. quand on remplacera les quantités qui y entrent, $x, y, y', y'' \dots y^{(m-1)}$ non plus par des quantités toutes arbitraires, mais $y, y', y'', \dots y^{(l-1)}$ seulement par des constantes arbitraires, et les autres par des valeurs dépendantes de ces mêmes constantes, — on conçoit dis-je qu'une ou plusieurs de ces fonctions F soit identiquement infinie, bien que cela n'ait pas lieu quand les quantités $y, y', y^{(m-1)}$ sont toutes remplacées par des constantes arbitraires. — Dans ce cas, l'Eq. φ prend le nom de Solution Singulière de l'Eq. différentielle proposée. Son caractère essentiel est de renfermer un moins grand nombre de constantes que l'intégrale Générale, et de ne pouvoir se déduire de cette Intégrale Générale par la particularisation de quelques unes de ces constantes : car on n'aurait plus, dans ce

dernier cas, une Solution Singulière, mais une Intégrale Particulière de l'Eq. donnée. — Cela montre bien que, dans les Eq. différentielles du premier ordre, les Solutions Singulières sont des relations déterminées entre x et y, sans aucune constante. — On voit de plus que le caractère général des Solutions Singulières est de renfermer rendre infinis un ou plusieurs des Coefficients de la Série qui donne l'Intégrale Générale : — Car, si cela n'arrivait pas, il est visible que l'intégrale Singulière pourrait se développer en Série, et que, en l'identifiant avec l'intégrale générale, ce qui serait alors possible, elle deviendrait une intégrale particulière.

En Résumé, une chose surtout se trouve jusqu'à présent démontrée, c'est que l'Eq. Différentielle donnée (1) a toujours une Intégrale, qu'on peut représenter par la Série (2).

Toutes les fois que l'on saura sommer cette Série, on aura une Equation finie $y = V(x, b, b' \dots b^{(m-1)})$ qui sera par conséquent l'intégrale Générale.

Réciproquement : Toute fonction

$$\Phi(x, y, c_1, c_2, \dots c_m) = 0$$

renfermant m constantes arbitraires, et satisfaisant à l'Eq. (1); c. à d. telle que, si on la suppose résolue

$$(3) \quad y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots c_m)$$

et si on la différentie $m-1$ fois, de manière à avoir

$$y' = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) \quad y'' = \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) \dots \quad y^{(m-1)} = \left(\frac{d^{m-1}\varphi}{dx^{m-1}}\right)$$

on puisse, des Equations ainsi formées, tirer, sans incompatibilité ni indétermination, les m constantes c_1 $c_2 \dots c_m$: — Cette Equation

est identique avec l'Intégrale Générale dont la Série (2) représente le Développement.

Cela ne souffre aucune difficulté. Car l'Eq. (3), développée en Série, donne

$$y = \varphi(a, c_1 ..) + (x-a)\,\varphi'(a, c_1 ..) + \frac{(x-a)^2}{1.2}\,\varphi''(a, c_1 ..) + ...$$

$$+ \frac{(x-a)^{m-1}}{1.2..(m-1)}\,\varphi^{(m-1)}(a, c_1 ..) + \frac{(x-a)^m}{1.2..m}\,\varphi^{(m)}(a, c_1 ..)$$

$$+ \frac{(x-a)^{m+1}}{1.2..(m+1)}\,\varphi^{(m+1)}(a, c_1 ..) + \text{etc.}$$

Or φ, φ', φ'', .. $\varphi^{(m-1)}$ doivent recevoir des valeurs arbitraires. D'ailleurs φ^m, φ^{m+1}, φ^{m+2} .. doivent être identiquement F, F_1, F_2 .. puisque l'Eq. (3) vérifie la proposée. Donc la dernière Equation, et par conséquent l'Eq. (3), coïncide bien identiquement avec la Série (2) C.Q.F.D.

Terminons enfin par quelques autres remarques Générales.

Supposons qu'on nous donne une Eq. Différentielle

$$(1) \qquad y^{(m)} = f(x, y, y', y'', .. y^{(m-1)})$$

et que son Intégrale Générale soit

$$(2) \qquad F(x, y, c_1, c_2, ... c_m) = 0$$

Si l'on différentie m fois celle-ci

$$\left.\begin{cases} dF = 0 \\ d^2F = 0 \\ \vdots \\ d^{m-1}F = 0 \\ d^mF = 0 \end{cases}\right\} (2)$$

Si, entre l'Equation (2) et les m suivantes, on élimine les m constantes, on retombe identiquement sur l'Eq. Différentielle proposée (1) : — on sait cela.

Supposons maintenant qu'on ne prenne pas une des Eq. (2)

et que, entre les m qui resteront, on élimine $m-1$ constantes, par exemple $c_2\ c_3\ c_4 \ldots c_m$: l'Eq. résultante, qui sera de la forme

$$c_1 = \varphi_1(x\ y\ y'\ y'' \ldots y^{(m-1)})$$

est dite une Intégrale première de l'Eq. différentielle proposée, sur laquelle c'est en quelque sorte une première intégration effectuée. On aura de même $m-1$ autres Intégrales premières

$$c_2 = \varphi_2(x\ y\ y' \ldots y^{(m-1)})$$

$$c_3 = \varphi_3(x\ y\ y' \ldots y^{(m-1)})$$

$$\ldots$$

$$c_m = \varphi_m(x\ y\ y' \ldots y^{(m-1)})$$

Si l'on connaissait ces m Intégrales premières, il est évident qu'en éliminant entre elles les $m-1$ dérivées qui y entrent, on retomberait sur l'intégrale Générale (2).

Chacune de ces Intégrales premières est indépendante du mode de calcul qu'on a employé pour l'obtenir. — Car, si l'on en pouvait trouver deux distinctes, relativement à une même constante,

$$c_1 = \varphi_1(x, y, y', \ldots y^{(m-1)})$$

$$c_1 = \psi(x, y, y', \ldots y^{(m-1)})$$

en éliminant c_1, on aurait une relation

$$\pi(x, y, y', y'' \ldots y^{(m-1)}) = 0$$

impossible, puisque pour $x=a$, on peut prendre à volonté y et ses $m-1$ premières dérivées.

L'Equation

$$c_1 = \varphi_1(x, y, y' \ldots y^{(m-1)})$$

étant différentiée, donne

$$0 = \frac{d\varphi_1}{dx} + y'\frac{d\varphi_1}{dy} + \ldots + y^{(m)}\frac{d\varphi_1}{d.\,y^{(m-1)}}$$

d'où je tirerai pour $y^{(m)}$ une valeur qui devra être identique

à celle que me donne l'Éq. (1). — On conçoit l'utilité de cette remarque dans le cas où l'on ne saurait pas résoudre en $y^{(m)}$ l'Éq. donnée, et où l'on pourrait cependant trouver une de ses Intégrales premières.

Une Intégrale Seconde contient deux Constantes, et provient de l'Élimination des $(m-2)$ autres. Évidemment, il y a $\frac{m(m-1)}{1.2}$ manières d'obtenir des Intégrales Secondes, et par conséquent tout autant de ces Intégrales. — Cela ne veut pas dire qu'elles soient toutes distinctes. Et en effet, si j'en prends deux, l'une en c_h et c_k, l'autre en c_h et c_l, leur ensemble, par l'Élimination de c_h, donnera une relation entre c_l et c_k, laquelle évidemment ne devra pas différer de l'intégrale Seconde en c_l et c_k obtenue directement.

En Général, il y a $\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1.2\cdots n}$ manières d'obtenir des Intégrales $n^{\text{ièmes}}$, contenant n constantes.

Dans ces Déterminations du nombre des Constantes, il faut bien faire attention si elles sont réellement distinctes, et leur nombre aussi grand qu'il le paraît d'abord. — Supposons par exemple que l'on donne

$$y = c\,e^{\alpha x+\beta} + c'\,e^{\alpha x+\gamma}$$

au premier abord, on serait tenté de croire qu'il y a deux Constantes arbitraires : il n'en est rien cependant. Car on a

$$y = \left(ce^{\beta} + c'e^{\gamma}\right)e^{\alpha x} = c''e^{\alpha x}$$

De même si l'on avait

$$y = c\,\sin(ax+b) + c'\,\sin(ax+b') + c''\,\sin(ax+b'')$$

on peut voir que ce n'est pas là l'intégrale Générale d'une Équation Différentielle du troisième ordre. En effet, faisons $x=0$; nous aurons

$$y_0 = c\sin b + c'\sin b' + c''\sin b''$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = c\,a\cos b + c'a\cos b' + c''a\cos b''$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = -a^2(c\sin b + c'\sin b' + c''\sin b'') = -a^2 y.$$

on ne peut donc se donner à volonté que y_0 et $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$: donc la proposée n'est que l'intégrale d'une Eq. du second ordre : — Et d'ailleurs, il est facile de voir que le nombre des constantes se réduit à deux. Car on peut écrire

$$y = \begin{cases} \sin ax\,\{c\cos b + c'\cos b' + c''\cos b''\} \\ + \cos ax\,\{c\sin b + c'\sin b' + c''\sin b''\} \end{cases}$$

ce qui revient à

$$y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax$$

Ces Généralités une fois établies, nous allons entrer dans le détail des quelques cas particuliers où l'on peut effectuer l'intégration des Equations différentielles d'ordres supérieurs.

I.

Nous Examinerons d'abord le cas où l'on a simplement :

$$(1)\qquad \frac{d^m y}{dx^m} = X$$

X étant fonction d'x seulement. — Dans ce cas, on intègre par une suite de quadratures. Car l'Eq. (1) donne

$$d.\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = X\,dx$$

d'où

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = \int X\,dx + C_1$$

C'est une intégrale première de la proposée. — On en tire

$$d.\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = dx\int X\,dx + C_1\,dx$$

D'où

$$\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = \int\left\{\int X\,dx\right\}dx + C_1 x + C_2$$

Ce que nous représenterons ainsi

$$\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = \int^2 X\,dx + C_1 x + C_2$$

et, en continuant ainsi, on arrivera évidemment à l'intégrale

$$y = \int^m X\,dx + C_1 x^{m-1} + C_2 x^{m-2} + \dots C_{m-1}x + C_m$$

Sous cette forme, l'intégration peut être assez compliquée. Souvent, on présente le résultat sous un autre aspect. En effet on a

$$\int dx\left(\int X\,dx\right) = x\int X\,dx - \int xX\,dx$$

De même

$$\int dx\left\{\int dx\left[\int X\,dx\right]\right\} = \frac{1}{1.2}\int\left(2x\int X\,dx - 2\int xX\,dx\right)dx$$

$$= \frac{1}{1.2}\left(x^2\int X\,dx - \int x^2X\,dx - 2x\int xX\,dx + 2\int x^2X\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{1.2}\left(x^2\int X\,dx - 2x\int xX\,dx + \int x^2X\,dx\right)$$

D'où, par analogie,

$$\int^m X\,dx = \frac{1}{1.2\dots(m-1)}\left(x^{m-1}\int X\,dx - (m-1)x^{m-2}\int xX\,dx + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}x^{m-3}\int x^2X\,dx - \dots \pm \int x^{m-1}X\,dx\right)$$

$\pm$ selon que m est impair ou pair. — Pour démontrer la généralité de ce résultat, on emploie la méthode ordinaire : on multiplie la formule ci-dessus par dx : on divise et multiplie le second membre par m ; on intègre séparément par parties

chacun des termes du second membre, et en réduisant, on trouve que la loi se maintient, parce que le coefficient de la dernière intégrale se trouve être le développement de $(-1)^m$ ou ∓ 1, selon que m est impair ou pair. — Le calcul est facile.

Cette forme de l'intégrale est plus simple, en ce sens qu'elle ne renferme pas d'intégrales superposées.

II.

Supposons une équation ne contenant ni x ni y, mais seulement deux dérivées consécutives, par exemple

$$(1) \qquad f\left(\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right) = 0$$

Je pose.

$$\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} = p$$

d'où

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{dp}{dx}$$

L'équation (1) devient alors

$$(2) \qquad f\left(p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$$

Reste à intégrer cette éq. qui est du 1er ordre, et ne contient pas x. C'est un cas que nous avons examiné déjà (p. 269). — Si l'on sait résoudre par rapport à $\frac{dp}{dx}$, on aura

$$\frac{dp}{dx} = \varphi(p)$$

$$dx = \frac{dp}{\varphi(p)}$$

$$x = \psi(p, c_1) \qquad \psi(p, c_1) = \int \frac{dp}{\varphi(p)}$$

Si l'on peut résoudre cette équation, et en tirer

$$p = \varpi(x, c_1)$$

c. à d.
$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = \pi(x, c_1)$$
on en déduira immédiatement
$$y = \int^{m-1} \pi(x, c_1)\,dx + c_2 x^{m-2} + c_3 x^{m-3} + \cdots + c_{m-1} x + c_m$$
et c'est bien l'intégrale générale, puisqu'elle contient m constantes complètement arbitraires, comme il serait facile de le vérifier.

Si l'Eq. $x = \psi(p, c_1)$ n'avait pu être résolue par rapport à p, on aurait cependant pu arriver à l'intégrale générale. — En effet, nous avons posé
$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = p$$
cela revient à
$$d.\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = p\,dx$$
et, comme nous avons $dx = \frac{dp}{\varphi(p)}$,
$$d.\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = \frac{p\,dp}{\varphi(p)}$$
d'où l'on tire
$$\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = \int \frac{p\,dp}{\varphi(p)} + C_2$$
ce qui revient à
$$d.\frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}} = \left\{\int \frac{p\,dp}{\varphi(p)} + C_2\right\}\frac{dp}{\varphi(p)} = \varphi_1(p)\,dp$$
d'où
$$\frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}} = \int \varphi_1(p)\,dp + C_3$$
et ainsi de suite. On arrivera ainsi à une équation finie entre p et $m-1$ constantes, et l'on éliminera p entre cette équation et l'Eq. $x = \psi(p, c_1)$. On aura ainsi l'intégrale générale.

Dans tout cela, nous avons supposé que l'Eq. (2) pouvait se résoudre par rapport à $\frac{dp}{dx}$. Mais il pourrait arriver que cela fût impossible, et qu'on sût résoudre seulement par rapport à p. Alors on en tirerait

$$p = \varpi\left(\frac{dp}{dx}\right)$$

ou bien, en posant $\frac{dp}{dx} = z$,

$$p = \varpi(z)$$

$$dp = \varpi'(z)\,dz$$

$$z\,dx = \varpi'(z)\,dz$$

$$dx = \frac{\varpi'(z)}{z}\,dz$$

$$x = \int \frac{\varpi'(z)}{z}\,dz + C_1$$

Si maintenant on élimine z entre cette éq. et $p = \varpi(z)$, on aura une éq. de la forme

$$x = \psi_1(p, c_1)$$

comme tout-à-l'heure. — À partir de là, le calcul s'achève de même.

Exemple. — Trouver une courbe telle que son rayon de courbure soit constant. On pose immédiatement l'équation

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} = a$$

D'où

$$dx = \frac{a\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad x - c = a\int\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = a\int\frac{p^{-3}\,dp}{\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{a}{2}\int\frac{d\cdot\frac{1}{p^2}}{\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$$

D'où successivement

$$(1+p^2)(x-c)^2 = a^2p^2 \qquad p^2 = \frac{(x-c)^2}{a^2-(x-c)^2} \qquad dy = \pm\frac{(x-c)\,dx}{\sqrt{a^2-(x-c)^2}} \qquad y - c_1 = \pm\sqrt{a^2-(x-c)^2}$$

et enfin

$$(y-c_1)^2 + (x-c)^2 = a^2$$

Équation d'un cercle de centre $c\,c_1$ et de rayon a.

III.

Supposons encore que l'éq. ne contienne que deux coefficients différentiels, mais que ceux-ci diffèrent de deux ordres. Soit

$$(1) \qquad f\left(\frac{d^my}{dx^m},\ \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}\right) = 0$$

Posons

$$\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = p \quad \text{d'où} \quad \frac{d^my}{dx^m} = \frac{d^2p}{dx^2}$$

l'Eq. proposée devient

$$(2) \qquad f\left(\frac{d^2p}{dx^2}, p\right) = 0$$

Supposons que l'on puisse résoudre cette Eq. et en tirer

$$\frac{d^2p}{dx^2} = \varphi(p)$$

En multipliant les deux membres par $2dp$, on aura

$$2\frac{dp}{dx}\cdot\frac{d^2p}{dx} = 2\varphi(p)dp$$

ou

$$2\frac{dp}{dx}\, d\left(\frac{dp}{dx}\right) = 2\varphi(p)\,dp$$

c.à.d.

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = 2\int\varphi(p)dp + C_1$$

et l'on est ramené à une quadrature, car on tire delà

$$dx = \frac{dp}{\sqrt{2\int\varphi(p)dp + C_1}}$$

d'où

$$(3) \qquad x = \int\frac{dp}{\sqrt{2\int\varphi(p)dp + C_1}} + C_2$$

Si maintenant cette Eq. peut se résoudre par rapport à p, elle donnera

$$p = \pi(x, C_1, C_2)$$

c.à.d.

$$\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = \pi(x, C_1, C_2)$$

et cette Intégrale seconde de la proposée donnera, pour l'Intégrale générale,

$$y = \int^{m-2}\pi(x, C_1, C_2)\,dx + C_3x^{m-3} + C_4x^{m-4} + \cdots + C_{m-1}x + C_m$$

Si l'Eq. (3) n'avait pu se résoudre en p, on aurait fait comme dans le cas précédent : on se serait rappelé que

$$d\cdot\frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}} = p\,dx = \frac{p\,dp}{\sqrt{2\int\varphi(p)dp + C_1}}$$

D'où

$$\frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}} = \int\frac{p\,dp}{\sqrt{2\int\varphi(p)dp + C_1}} + C_2 = \chi(p, C_1) + C_2$$

et l'on continuerait de même.

Comme cas particulier, on pourrait prendre celui de l'Eq. $f_1\left(\frac{d^2y}{dx^2}, y\right) = 0$. Mais dans ce cas, il y a des méthodes quelquefois préférables, et que nous verrons plus loin.

IV.

Il peut arriver que l'Equation ne contienne que x avec diverses dérivées. alors on a

$$(1) \qquad f\left(x, \frac{d^my}{dx^m}, \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}, \cdots \frac{d^{m+k}y}{dx^{m+k}}\right) = 0$$

Cette Equation s'abaisse de m ordres : car, en posant

$$\frac{d^my}{dx^m} = p$$

elle devient

$$(2) \qquad f\left(x, p, \frac{dp}{dx}, \frac{d^2p}{dx^2}, \cdots \frac{d^kp}{dx^k}\right) = 0$$

Il restera à Intégrer cette Equation, si on le peut. _ Supposons cette opération effectuée :

$$p = \varphi(x, c_1, c_2, \cdots c_k)$$

cela revient à

$$\frac{d^my}{dx^m} = \varphi(x, c_1, c_2, \cdots c_k)$$

alors une formule connue donnera l'Intégrale.

Exemple. _ On demande une courbe plane telle que son rayon de Courbure soit une fonction déterminée de l'abscisse.

L'Equation sera

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} = \varphi(x) \qquad \left\{ p = \frac{dy}{dx} \right\}$$

d'où

$$\frac{dx}{\varphi(x)} = \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \int \frac{dx}{\varphi(x)} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} + C_1$$

si par exemple $\varphi(x) = \frac{a^2}{2x}$, ce qui revient à dire que le rayon de Courbure varie en raison Inverse du double de l'abscisse, on aura

$$\int \frac{2x\,dx}{a^2} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} + C_1 \qquad \frac{x^2}{a^2} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} + C_1 \qquad (1+p^2)\left(\frac{x^2}{a^2} - C_1\right)^2 = p^2 \qquad p = \pm \frac{\frac{x^2}{a^2} - C_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} - C_1\right)^2}}$$

Cette expression, qu'on a eu lieu d'étudier, ne peut s'intégrer sous forme finie : elle se ramène aux fonctions elliptiques. Elle représente la Courbe Elastique, c.à.d. la courbe que figure une verge élastique fixée horizontalement à une de ses extrémités, et portant un poids à l'autre.

V.

Un cas analogue au précédent, est celui où l'on a l'équation

$$(1) \qquad f\left(y, \frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}, \ldots \frac{d^{m+k}y}{dx^{m+k}}\right) = 0$$

L'ordre de l'équation ne s'abaisse plus de m unités. Pour le voir, il faut avoir recours à une transformation, à un changement de variable, afin de rentrer dans le cas précédent: on prendra y pour nouvelle variable indépendante. Cherchons ce que deviennent alors les diverses dérivées, et d'abord, posons

$$\frac{dy}{dx} = p$$

puis, cherchons les dérivées suivantes en fonction de p et de y. Pour cela, rappelons-nous que le coefficient différentiel du 1er. ordre, $\frac{dy}{dx}$, peut toujours être regardé comme le quotient de deux différentielles prises par rapport à une autre variable, et qu'on a toujours $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$. Puis, remarquons que x et p peuvent être regardés comme fonction d'y. Cela posé, on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{\frac{dp}{dy}}{\frac{dx}{dy}} = p\,\frac{dp}{dy}$$

de même

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d\left(p\frac{dp}{dy}\right)}{dx} = \frac{\frac{d\left(p\frac{dp}{dy}\right)}{dy}}{\frac{dx}{dy}} = p\left\{\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dp}{dy} + p\,\frac{d^2p}{dy^2}\right\}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\,\frac{d^2p}{dy^2}$$

De même encore

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{\frac{d\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)}{dy}}{\frac{dx}{dy}} = p\left\{\left(\frac{dp}{dy}\right)^3 + 4p\,\frac{dp}{dy}\,\frac{d^2p}{dy^2} + p^2\,\frac{d^3p}{dy^3}\right\}$$

et ainsi de suite. Tous ces résultats sont homogènes par rapport à p et ses diverses dérivées, et le degré est égal à l'indice de différentiation. De plus, on voit que, dans $\frac{d^ky}{dx^k}$ entre au plus $\frac{d^{k-1}p}{dx^{k-1}}$.

D'après cela, si, dans l'Éq. proposée (1), on remplace les divers coefficients différentiels par leurs valeurs, on aura évidemment un résultat tel que

$$\varphi\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2p}{dy^2}, \dots \frac{d^{m+k-1}p}{dy^{m+k-1}}\right) = 0$$

et l'ordre de l'Équation n'est abaissé que d'une unité.

Exemple. — Trouver une courbe plane dans laquelle le rayon de courbure soit proportionnel à la longueur de la normale.

On a

$$\rho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} \qquad N = y\sqrt{1+p^2}$$

L'Équation du problème est donc

$$(1) \qquad \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} = \pm ay\sqrt{1+p^2}$$

je mets le double signe, parce que je dois prendre $\pm(1+p^2)^{\frac{3}{2}}$ selon que $\frac{dp}{dx}$, c.à.d. $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positif ou négatif, c.à.d. selon que la courbe est convexe ou concave. Donc, selon que je prendrai l'un ou l'autre signe, je devrai trouver une courbe convexe ou concave.

Cette Éq. (1), telle qu'elle est, n'est pas intégrable, puisqu'elle contient 3 variables, p, x, y. Remplaçons $\frac{dp}{dx}$ par sa valeur $p\frac{dp}{dy}$ que nous venons de trouver : il viendra :

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p\frac{dp}{dy}} = \pm ay\sqrt{1+p^2}, \quad 1+p^2 = \pm ay\, p\frac{dp}{dy}, \quad \frac{dy}{y} = \pm\frac{a\,p\,dp}{1+p^2}, \quad \mathcal{L}\frac{y}{c} = \pm\frac{a}{2}\mathcal{L}(1+p^2)$$

$$\pm\frac{2}{a}\mathcal{L}\frac{y}{c} = \mathcal{L}(1+p^2)$$

$$\mathcal{L}\left\{\left(\frac{y}{c}\right)^{\pm\frac{2}{a}}\right\} = \mathcal{L}(1+p^2)$$

$$\left(\frac{y}{c}\right)^{\pm\frac{2}{a}} = 1+p^2$$

D'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\pm\frac{2}{a}}-1}$$

$$(2) \qquad dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\pm\frac{2}{a}}-1}}$$

Cette expression ne peut être intégrée quand a est quelconque. Cela peut se faire toutefois pour $a=1$ et $a=2m$, m étant un entier quelconque. Dans ce dernier cas, en effet, si l'on prend le signe $+$, l'Éq. (2) devient $dx = c^{\frac{1}{2m}}dy\left(y^{\frac{1}{m}}-c^{\frac{1}{m}}\right)^{-\frac{1}{2}}$, et en posant $y^{\frac{1}{m}}=z$, il est visible qu'on arrive à une expression que l'on sait intégrer. — Il en est de même pour le cas où l'on prendrait le signe $-$: alors l'Éq. (2) devient $dx = y^{\frac{1}{2m}}dy\left(c^{\frac{1}{m}}-y^{\frac{1}{m}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ et l'on arrive à une expression intégrable en posant $y^{\frac{1}{2m}}=z$. — Mais ces résultats généraux n'ont rien de bien remarquable.

Deux valeurs particulières de a fournissent des résultats intéressants. C'est $a=1$ et $a=2$.

Prenons $a=1$ et le signe $+$. L'Eq. (2) devient

$$dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{y^2-c^2}} \qquad \frac{x-c_1}{c} = \mathcal{L}\left(y+\sqrt{y^2-c^2}\right)$$

ce que l'on peut écrire aussi

$$\frac{x-c_1}{c} = \mathcal{L}\left(\frac{y+\sqrt{y^2-c^2}}{c}\right)$$

D'où

$$c\,e^{\frac{x-c_1}{c}} = y+\sqrt{y^2-c^2} \qquad (\alpha)$$

En multipliant les deux membres par $y-\sqrt{y^2-c^2}$, il vient

$$c\,e^{\frac{x-c_1}{c}}\left(y-\sqrt{y^2-c^2}\right) = c^2$$

ou

$$c\,e^{-\frac{x-c_1}{c}} = y-\sqrt{y^2-c^2} \qquad (\beta)$$

ajoutant les Eq. (α) et (β), qui ne sont que deux formes différentes d'une même Eq., on a

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-c_1}{c}} + e^{-\frac{x-c_1}{c}}\right)$$

Equation représentant une courbe qui a des branches infinies, puisque y augmente indéfiniment en même temps que x. – Il y a un minimum pour y : car, si $y<c$, l'Eq. différentielle montre que dx devient imaginaire. Donc il y a un point de la courbe plus bas que tous les autres. Prenons l'axe des y passant par ce point, et perp. à l'axe des x, qui lui, nous a été donné une fois, et ne peut plus être changé. alors, pour $x=0$, je devrai avoir $y=c$: Donc

$$c = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{c_1}{c}} + e^{-\frac{c_1}{c}}\right) \qquad 2 = e^{\frac{c_1}{c}} + e^{-\frac{c_1}{c}}$$

D'où $c_1=0$. L'Eq. devient alors

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

c'est l'Eq. d'une chaînette. – La courbe est symétrique par rapport à l'axe des y : chez elle, le rayon de courbure est égal à la normale.

Prenons actuellement $a=1$ et le signe $-$. L'Eq. (2) deviendra

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{c^2-y^2}} \qquad x-c_1 = \sqrt{c^2-y^2} \qquad (x-c_1)^2+y^2 = c^2$$

Equation représentant une infinité de cercles dont le rayon est arbitraire, mais dont les centres sont sur l'axe des x.

Prenons $a=2$ et le signe $+$. Nous aurons

$$dx = 2\sqrt{c}\,\frac{dy}{2\sqrt{y-c}} \qquad (x-c_1)^2 = 4c(y-c) \qquad y-c = \frac{(x-c_1)^2}{4c}$$

Equation d'une suite de paraboles dont l'axe est perpendiculaire à l'axe des x.

Enfin, avec $a=2$ et le signe $-$, nous avons

$$dx = dy\sqrt{\frac{y}{c-y}}$$

Equation d'une cycloïde dont la base est l'axe des x, et dont le cercle générateur a pour rayon l'arbitraire $\frac{c}{2}$.

Autre Exemple. – On rencontre, à propos du mouvement d'un mobile lancé en l'air en ligne droite, et soumis à la pesanteur qui varie, et à la résistance de l'air

qui est proportionnelle au carré de la vitesse, — l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2 f(y) + \varphi(y) = 0$$

or $\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$, donc

$$p\frac{dp}{dy} + p^2 f(y) + \varphi(y) = 0$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{d.p^2}{dy} + 2p^2 f(y) + 2\varphi(y) = 0$$

équation linéaire en p^2. — Ce qu'il y a de remarquable, c'est que, si la résistance de l'air avait varié proportionnellement à la simple vitesse, $\frac{d^2y}{dx^2}$ aurait été remplacé par $\frac{dy}{dx}$, et l'Eq. n'aurait plus été intégrable.

VI.

Nous arrivons au cas où les deux variables entrent dans l'Eq. avec les divers coefficients différentiels.

1°. Supposons une équation homogène par rapport à y et à toutes ses dérivées :

$$(1) \qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right) = 0$$

Soit m le degré d'homogénéité. Si je divise par y^m, l'Eq. deviendra

$$(2) \qquad \varphi\left(x, \frac{\frac{dy}{dx}}{y}, \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{y}, \dots\right) = 0$$

Posons actuellement

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = u$$

d'où

$$\frac{dy}{y} = u\,dx$$

$$y = e^{\int u\,dx}$$

J'en déduirai

$$\frac{dy}{dx} = u\,e^{\int u\,dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{\int u\,dx}\left(\frac{du}{dx} + u^2\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^{\int u\,dx}\left(\frac{d^2u}{dx^2} + 3u\frac{du}{dx} + u^3\right)$$



et en général

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{\int u dx} \left(\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \text{etc} \dots + u^n \right)$$

Substituant, l'équation deviendra

$$\pi \left(x, u, \frac{du}{dx}, \dots \frac{d^{k-1} u}{dx^{k-1}} \right) = 0$$

si k était l'ordre de différentiation le plus élevé dans la proposée ; et celle-ci sera ainsi abaissée d'un ordre. – Mais cette transformation est rarement utile.

2°. Nous considérerons encore le cas d'une équation

$$(1) \qquad f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots \frac{d^m y}{dx^m} \right) = 0$$

ne contenant pas x, et homogène par rapport aux dérivées considérées comme des facteurs élevés à des puissances marquées par l'indice : c'est-à-dire que si l'on représente ces dérivées symboliquement par $d, d^2, d^3, \dots d^m$, l'éq. sera homogène en d. alors l'équation s'abaisse de deux ordres. – En effet, changeons de variable indépendante, et posons

$$\frac{dy}{dx} = p \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 + p^2 \frac{d^2 p}{dy^2}, \quad \text{etc}$$

Substituons dans l'éq. (1) elle prendra la forme

$$(2) \qquad \varphi\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2 p}{dy^2}, \dots \frac{d^{m-1} p}{dy^{m-1}} \right) = 0$$

et sera déjà abaissée d'un ordre. – Maintenant, cette transformation a ce caractère que chaque dérivée $\frac{d^n y}{dx^n}$ est remplacée par une fonction de p et de ses dérivées homogène du degré n. Donc, d'après cela et d'après la nature particulière de l'équation (1), on voit que l'éq. (2) sera homogène en $p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2 p}{dy^2}, \dots$ chacune de ces dérivées étant maintenant considérée comme un facteur unique. Donc, en posant

$$p = e^{\int u dy}$$

l'équation s'abaissera encore d'un ordre.



Exemple. — Soit l'équation

$$(1) \quad M\frac{d^3y}{dx^3} + N\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + P\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$$

M, N, P étant des fonctions d'y seulement. — Remplaçant $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ par leurs valeurs en p, il vient

$$Mp\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + Mp^2\frac{d^2p}{dy^2} + Np^2\frac{dp}{dy} + Pp^3 = 0$$

ce qu'on peut écrire

$$(2) \quad M\left(\frac{\frac{dp}{dy}}{p}\right)^2 + M\left(\frac{\frac{d^2p}{dy^2}}{p}\right) + N\left(\frac{\frac{dp}{dy}}{p}\right) + P = 0$$

Posons

$$\frac{\frac{dp}{dy}}{p} = u \quad \text{d'où} \quad \frac{dp}{dy} = ue^{\int u\,dy} \quad \text{et} \quad \frac{d^2p}{dy^2} = \left(u^2 + \frac{du}{dy}\right)e^{\int u\,dy}$$

Remplaçant dans l'Eq. (2), il vient

$$2Mu^2 + M\frac{du}{dy} + Nu + P = 0$$

ou

$$(3) \quad \frac{du}{dy} + 2u^2 + \frac{N}{M}u + \frac{P}{M} = 0$$

c'est l'équation d'Euler. On pourra donc la résoudre toutes les fois qu'on connaîtra une solution particulière $u = Y$.

Un cas particulier de ce problème, c'est celui où l'on se proposerait la question suivante: Trouver une fonction qui soit à sa dérivée première comme sa dérivée seconde est à sa dérivée troisième. — L'Eq. est

$$y : \frac{dy}{dx} :: \frac{d^2y}{dx^2} : \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$y\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

alors, $P = 0$, $M = y$, et $N = -1$. L'Eq. (3) devient

$$\frac{du}{dy} + 2u^2 - \frac{u}{y} = 0$$

$$\frac{du}{dy} - \frac{1}{y}\cdot u = -2u^2$$

c'est l'Eq. de Bernoulli; on peut donc Intégrer.

Jusqu'ici, nous n'avons donné que des théories fort Incomplètes; nous en abordons une beaucoup plus satisfaisante.

Équations Linéaires d'ordre quelconque.

Ces Équations sont de la forme

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + Q\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + T\frac{dy}{dx} + Vy = V$$

les dérivées ni la fonction ne se multipliant jamais entre elles, et les coefficients étant des fonctions quelconques de x.

Il y a deux grandes classes d'Équations linéaires à considérer, suivant que le 2^d. membre V est nul ou ne l'est pas.

I. Équations Linéaires sans second membre.

Une pareille Équation est de la forme

$$(1)\quad \frac{d^m y}{dx^m} + P\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + Q\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + T\frac{dy}{dx} + Uy = 0$$

Théorème. — Si l'on connaît un certain nombre des Solutions de l'Éq. (1), leur somme est aussi une Solution de cette même Équation.

Soient en effet

$$y = y_1 \qquad y = y_2 \quad \cdots\cdots \quad y = y_p$$

p solutions de l'Équation (1), on aura

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^m y_1}{dx^m} + P\dfrac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} + \cdots\cdots + T\dfrac{dy_1}{dx} + Uy_1 = 0 \\ \dfrac{d^m y_2}{dx^m} + P\dfrac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}} + \cdots\cdots + T\dfrac{dy_2}{dx} + Uy_2 = 0 \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{d^m y_p}{dx} + P\dfrac{d^{m-1}y_p}{dx^{m-1}} + \cdots\cdots + T\dfrac{dy_p}{dx} + Uy_p = 0 \end{array}\right.$$

ajoutant toutes ces Equations, et observant que $d^n A + d^n B = d^n (A+B)$, on démontre le théorème.

On voit aussi que la somme de toutes ces solutions, multipliées chacune par une constante arbitraire, sera encore une solution de la proposée.

Car, si $y = y_n$ satisfait à l'Eq. (1), $y = C y_n$ y satisfera également. C'est évident.

Si donc on parvient à découvrir m solutions particulières de la proposée, $y_1\ y_2 \dots y_m$, on aura l'intégrale générale en prenant

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \dots + c_m y_m$$

Toutefois, pour que ce soit bien là l'intégrale générale, il faut qu'entre les quantités $y_1, y_2, \dots y_m$ il n'existe pas de relations telles que le nombre des constantes se trouve diminué.

Cherchons, d'après cela, à résoudre l'Equation (1).

Pour cela, remarquons qu'on peut l'abaisser en lui appliquant la théorie des fonctions homogènes par rapport à la fonction et à ses dérivées. Posons donc

$$y = e^{\int u dx}$$

D'où l'on tire en général

$$\frac{d^p y}{dx^p} = e^{\int u dx} \left(\frac{d^{p-1} u}{dx^{p-1}} + \dots + H \frac{du}{dx} + u^p \right)$$

Si l'on tire delà les divers coefficients différentiels, et qu'on les reporte dans l'Eq. (1), celle-ci prend la forme

$$(2) \quad \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + M \frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}} + \dots + N \frac{du}{dx} + \left(u^m + P u^{m-1} + Q u^{m-2} + \dots + Tu + V \right) = 0$$

L'Equation se trouve ainsi abaissée d'un ordre. – Cherchons des valeurs de u qui y satisfassent. – Or, prenons l'Equation

$$(3) \qquad u^m + Pu^{m-1} + Qu^{m-2} + \cdots + Tu + V = 0$$

il peut arriver que, a_1 étant une constante, $u = a_1$ vérifie cette équation. alors, il est visible que $u = a_1$ satisfait aussi l'Eq. (2), puisque les dérivées d'une quantité constante sont nulles. alors $y_1 = e^{a_1 x}$ est une solution de l'Eq. proposée (1). Et de même, chaque racine constante de l'Eq. (3) donne une solution parti-culière de la proposée.

Si maintenant tous les coefficients de l'Eq. (3), c.à.d. ceux de l'Eq. donnée, sont constants, toutes les m racines de l'Eq. (3) seront constantes, et donneront les m solutions particulières

$$y_1 = e^{a_1 x} \qquad y_2 = e^{a_2 x} \quad \cdots \quad y_m = e^{a_m x}$$

et l'intégrale générale de l'Eq. proposée sera par conséquent

$$(4) \qquad y = c_1 e^{a_1 x} + c_2 e^{a_2 x} + c_3 e^{a_3 x} + \cdots + c_m e^{a_m x}.$$

Il y a une autre méthode, moins naturelle il est vrai, mais plus prompte, pour arriver à ce résultat. — Cherchons s'il est possible de trouver pour l'Eq. (1) des solutions de la forme

$$y = Ce^{ux}$$

u étant un coefficient déterminé, C une constante arbitraire. Nous tirerons delà

$$\frac{dy}{dx} = Cue^{ux} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = Cu^2e^{ux} \quad \cdots \quad \frac{d^my}{dx^m} = Cu^me^{ux}$$

en substituant dans la proposée, Ce^{ux} s'en va comme facteur commun, et il reste

$$u^m + Pu^{m-1} + Qu^{m-2} + \cdots + Tu + V = 0$$

L'hypothèse dont nous sommes partis est donc admissible, et donnera autant de solutions que la dernière équation admet de racines constantes, et l'intégrale générale si l'Eq. proposée a tous ses coefficients constants.

Ici se présente une difficulté. L'Eq. (4) n'est bien l'intégrale générale de l'Eq. (1) que dans le cas où toutes les racines de l'Eq. (3) sont inégales. — Démontrons d'abord, ce qui n'est pas évident à priori, que dans ce cas, on a bien l'intégrale générale, c. a. d. que, pour $x=a$, on peut prendre arbitrairement y et ses $m-1$ premières dérivées, et en tirer les m constantes. — D'abord, au lieu de $x=a$, nous pouvons prendre $x=0$. car l'Eq. (4) peut très bien s'écrire

$$y = c_1 e^{a_1(x-a)} + c_2 e^{a_2(x-a)} + \dots + c_m e^{a_m(x-a)}$$

et, faire $x=a$ dans cette équation, ou $x=0$ dans l'Eq. (4), c'est absolument la même chose. — Cela posé, si nous prenons les valeurs de y et de ses $(m-1)$ premières dérivées ; si, dans ces valeurs, nous faisons $x=0$, et si nous les égalons alors à une valeur prise arbitrairement que nous continuerons de désigner par $b, b', b'', \dots b^{(m-1)}$, nous aurons les m équations

$$\left\{\begin{aligned}
b &= c_1 + c_2 + c_3 + \dots\dots + c_m \\
b' &= c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 + \dots + c_m a_m \\
b'' &= c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 + c_3 a_3^2 + \dots + c_m a_m^2 \\
&\dots\dots \\
b^{(m-1)} &= c_1 a_1^{m-1} + c_2 a_2^{m-1} + c_3 a_3^{m-1} + \dots + c_m a_m^{m-1}
\end{aligned}\right.$$

Reste à savoir maintenant si ces m équations du 1er. degré donneront pour $c_1, c_2, c_3 \dots c_m$ des valeurs finies et déterminées. Pour le reconnaître, multiplions la 1re. par k, la 2e. par k', la 3e. par k'', … la $(m-1)^e$ par $k^{(m-2)}$, la dernière par 1, et ajoutons : nous aurons

$$kb + k'b' + k''b'' + \dots + k^{(m-2)} b^{(m-2)} + b^{(m-1)} = c_1 \varphi(a_1) + c_2 \varphi(a_2) + \dots + c_m \varphi(a_m)$$

en posant pour abréger

$$\varphi(a) = k + k'a + k''a^2 + \dots + k^{(m-2)}a^{m-2} + a^{m-1}$$

Cherchons maintenant les valeurs d'une des constantes, c_1 par ex. Pour cela, on connaît la méthode : il faut égaler à zéro les coef-ficients de toutes les autres inconnues, et poser

$$(A) \quad \begin{cases} \varphi(a_2) = 0 \\ \varphi(a_3) = 0 \\ \vdots \\ \varphi(a_m) = 0 \end{cases}$$

puis tirer delà $k, k', k'', \dots k^{(m-2)}$ et reporter leurs valeurs dans celle de c_1. — Or, au lieu de faire une élimination pénible, remar-quons que, se donner les Eq. (A), c'est exprimer que les $(m-1)$ quantités $a_2, a_3, a_4, \dots a_m$ vérifient l'Eq. $\varphi(a) = 0$, laquelle ne peut d'ailleurs avoir que $(m-1)$ racines : c'est donc poser

$$\varphi(a) = 0$$

$\varphi(a)$ étant de la forme

$$\varphi(a) = (a-a_2)(a-a_3)(a-a_4)\dots(a-a_m)$$

or on a d'autre part

$$\varphi(a) = k + k'a + k''a^2 + \dots + a^{m-1}$$

ces deux valeurs de $\varphi(a)$ doivent être identiques. Si donc je parviens à trouver le développement de la première, j'aurai facilement $k, k' \dots$ par une identification des coefficients des mêmes puissances de a. — Or, si l'on désigne par $f(a)$ le 1er. membre de l'Eq. (3), c.à.d.

$$f(a) = a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} + \dots + Ta + V = 0$$

dont les racines sont par hypothèse $a_1\ a_2\ a_3 \dots a_m$, on aura

$$f(a) = (a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)\dots(a-a_m)$$

Donc

$$\varphi(a) = \frac{f(a)}{a-a_1}$$

on sait développer $\frac{f(a)}{a-a_1}$. on aura donc identiquement

$$k + k'a + k''a^2 + \dots + k^{(m-3)}a^{m-3} + k^{(m-2)}a^{m-2} + a^{m-1} = a^{m-1} + \left.\begin{array}{l} a_1 \\ +P \end{array}\right| a^{m-2} + \left.\begin{array}{l} a_1^2 \\ +Pa_1 \\ +Q \end{array}\right| a^{m-3} + \dots + \left.\begin{array}{l} a_1^{m-1} \\ +Pa_1^{m-2} \\ +Qa_1^{m-3} \\ + \dots \\ +T \end{array}\right|$$

d'où l'on tire

$$k = a_1^{m-1} + Pa_1^{m-2} + Qa_1^{m-3} + \dots + T$$

$$\dots$$

$$k^{(m-3)} = a_1^2 + Pa_1 + Q$$

$$k^{(m-2)} = a_1 + P$$

Ces valeurs n'ont rien d'impossible, et ne peuvent être infinies: d'ailleurs quelques unes peuvent être nulles sans inconvénient: de sorte que la valeur de c_1, qui est

$$c_1 = \frac{kb + k'b' + k''b'' + \dots + b^{(m-1)}}{\varphi(a_1)}$$

n'est ni infinie ni indéterminée: car son numérateur est connu, et, comme $\varphi(a) = \frac{f(a)}{a-a_1}$, on a $\varphi(a_1) = f'(a_1)$, et, comme a_1 est une racine simple de l'Eq. (3), $\varphi(a_1)$ ne peut être nul.

D'ailleurs ce qu'on a dit de c_1 se répéterait pour les autres constantes.

Mais on voit que, si l'Eq. (3) avait des racines égales, on ne pourrait plus dire que l'on a l'intégrale générale de la proposée.

Que faut-il donc faire dans ce cas, quand on a $a_1 = a_2$ par exemple? Même alors, une méthode ingénieuse, due à d'Alembert, permet de trouver l'intégrale générale.

Supposons pour un instant que tous les coefficients de l'Eq. (3)

$$(3) \quad a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} + \dots + Ta + V = 0$$

soient modifiés infiniment peu, de manière qu'il n'y ait plus

de racines égales, et qu'on ait

$$a_2 = a_1 + h$$

les racines seront alors

$$a_1,\ a_1+h,\ a_3,\ a_4,\ \dots\ a_m$$

et l'intégrale générale de la proposée

$$y = c_1 e^{a_1 x} + c_2 e^{a_1 x + h x} + c_3 e^{a_3 x} + \dots + c_m e^{a_m x}$$

nous supposerons ensuite que h tende vers zéro, et si nous parvenons alors à trouver une limite vers laquelle tende l'intégrale, cette limite contenant m constantes, il est évident que ce sera l'intégrale générale de la proposée. — or, l'intégrale peut s'écrire

$$y = e^{a_1 x}\left(c_1 + c_2 e^{h x}\right) + \text{etc.}$$

$$y = e^{a_1 x}\left(c_1 + c_2 + \frac{c_2 h}{1} x + \frac{c_2 h^2}{1.2} x^2 + \dots\right) + \text{etc.}$$

Je puis poser $c_1 + c_2 = A$ et $c_2 h = B$, A et B étant deux nouvelles constantes entièrement arbitraires. alors il vient

$$y = e^{a_1 x}\left(A + Bx + \frac{Bh}{1.2} x^2 + \frac{Bh^2}{1.2.3} x^3 + \dots\right) + \text{etc.}$$

Ici, quel que soit h, représente l'intégrale générale de l'Eq. proposée, intégrale dans laquelle A et B, constantes arbitraires, ne conservent aucune espèce de relation avec h, et restent arbitraires quelques valeurs qu'on puisse attribuer à h. Si h tend vers zéro, il en est toujours de même, donc aussi à la limite. Donc l'intégrale générale de l'Eq. proposée est alors

$$y = e^{a_1 x}(A + Bx) + c_3 e^{a_3 x} + \dots + c_m e^{a_m x}$$

S'il y avait trois racines égales, $a_1 = a_2 = a_3$, alors, on supposerait les coefficients altérés de manière à donner $a_3 = a_1 + h$. on retombe alors dans le cas de deux racines égales, où l'intégrale est

$$y = e^{a_1 x}(A + Bx) + c_3 e^{a_1 x + h x} + c_4 e^{a_4 x} + \dots + c_m e^{a_m x}$$

et, comme tout-à-l'heure, si l'on suppose que h tend vers zéro, on trouvera

$$y = e^{a_1 x}\left(M + Nx + Hx^2\right) + c_4 e^{a_4 x} + \dots + c_m e^{a_m x}$$

et ainsi de suite, pour un nombre quelconque de Racines Egales.

Il peut arriver que l'Eq. (3) admette des Racines Imaginaires, mais il n'y a là aucune espèce de difficulté théorique. Seulement il est bon de voir comment on peut faire disparaître les Imaginaires. — Or, si l'on a

$$a_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

on aura une Racine Conjuguée

$$a_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1}$$

ces deux racines donneront, dans l'Intégrale, les deux termes

$$e^{\alpha x}\left(C_1 e^{\beta x\sqrt{-1}} + C_2 e^{-\beta x\sqrt{-1}}\right)$$

ou

$$e^{\alpha x}\left\{C_1\left(\cos\beta x + \sqrt{-1}\sin\beta x\right) + C_2\left(\cos\beta x - \sqrt{-1}\sin\beta x\right)\right\}$$

si donc on pose $C_1 + C_2 = A$, $(C_1 - C_2)\sqrt{-1} = B$, A et B étant de nouvelles constantes, réelles ou Imaginaires, il restera

$$e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$$

qu'on écrit qqf. sous une des deux formes équivalentes:

$$Me^{\alpha x}\cos(\beta x + N)$$

$$Me^{\alpha x}\sin(\beta x + N)$$

M et N étant toujours des constantes arbitraires.

Enfin, il peut y avoir des Racines Imaginaires Egales. ainsi, chacune des racines $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ peut entrer n fois dans l'Eq. (3). L'ensemble des termes de l'intégrale qui correspond à ces racines s'écrira

$$e^{\alpha x}\left\{e^{\beta x\sqrt{-1}}\left(A + Bx + Cx^2 + \cdots + Hx^{n-1}\right) + e^{-\beta x\sqrt{-1}}\left(A' + B'x + C'x^2 + \cdots + H'x^{n-1}\right)\right\}$$

ou bien

$$e^{\alpha x}\left\{\left(\cos\beta x + \sqrt{-1}\sin\beta x\right)\left(A + Bx + \cdots + Hx^{n-1}\right) + \left(\cos\beta x - \sqrt{-1}\sin\beta x\right)\left(A' + B'x + \cdots + H'x^{n-1}\right)\right\}$$

ou bien enfin

$$e^{\alpha x}\left\{\cos\beta x\,(M+Nx+Rx^2+\dots+Sx^{n-1})+\sin\beta x\,(M'+N'x+R'x^2+\dots+S'x^{n-1})\right\}$$

$M, N \dots S$, $M', N' \dots S'$ étant de nouvelles constantes, obtenues en posant

$$A+A'=M \qquad (A-A')\sqrt{-1}=M'$$
$$B+B'=N \qquad (B-B')\sqrt{-1}=N'$$
$$C+C'=R \quad \text{et} \quad (C-C')\sqrt{-1}=R'$$
$$\dots \qquad \dots$$
$$H+H'=S \qquad (H-H')\sqrt{-1}=S'$$

Exemples.

Prenons l'Eq. linéaire du second ordre

$$(1)\quad \frac{d^2y}{dx^2}-n^2y=0$$

Elle est à coefficients constants. L'Equation $a^2-n^2=0$ me donne $a=\pm n$. L'intégrale générale est donc

$$y=C_1e^{nx}+C_2e^{-nx}$$

Si l'on avait l'Equation

$$(2)\quad \frac{d^2y}{dx^2}+n^2y=0$$

nous aurions eu $a^2+n^2=0$, $a=\pm n\sqrt{-1}$, et pour intégrale

$$y=C_1e^{nx\sqrt{-1}}+C_2e^{-nx\sqrt{-1}}$$

ou

$$y=A\cos nx+B\sin nx$$

ce qu'on aurait pu du reste trouver directement en observant que l'Eq. $\frac{d^2y}{dx^2}=-n^2y$ exige que l'on trouve une fonction se reproduisant, à un facteur près, par une double différentiation, et que les sinus et cosinus sont connus pour jouir de cette propriété.

Si maintenant les coefficients de l'Eq. linéaire sans second membre ne sont pas constants, rien de ce qui précède ne peut plus être appliqué. Il n'y a que des cas particuliers où l'intégration réussisse. Le plus remarquable est celui où l'on a l'Equation

$$(1)\quad (ax+b)^m\frac{d^my}{dx^m}+A_1(ax+b)^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\dots+A_{m-1}(ax+b)\frac{dy}{dy}+A_my=0$$

on peut, par deux méthodes différentes, ramener cette Equation au cas des Equations linéaires à coefficients constants.

1ère. Méthode. — Cherchons s'il est possible de trouver des valeurs

de y de la forme $$y = (ax+b)^h$$
Je tire de là
$$\frac{dy}{dx} = ah(ax+b)^{h-1}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2h(h-1)(ax+b)^{h-2}$$
$$\cdots\cdots$$

Substituant dans l'équation (1)

$$h(h-1)\ldots(h-m+1)a^m(ax+b)^h + A_1 h(h-1)\ldots(h-m+2)a^{m-1}(ax+b)^h + \ldots + A_m(ax+b)^h = 0$$

Tout devient divisible par $(ax+b)^h$: et il reste une équation de la forme
$$h^m + Mh^{m-1} + Nh^{m-2} + \ldots + Rh + S = 0$$
qui donnera m racines, $h_1\ h_2\ h_3 \ldots h_m$, et l'intégrale cherchée sera donc
$$y = C_1(ax+b)^{h_1} + C_2(ax+b)^{h_2} + \ldots + C_m(ax+b)^{h_m}$$

2e. Méthode. – Posons
$$ax+b = e^t$$
d'où
$$a\,dx = e^t dt$$
$$\frac{dt}{dx} = ae^{-t}$$
Maintenant, t est fonction d'x. Donc nous avons
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = ae^{-t}\frac{dy}{dt}.$$
De même
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = ae^{-t}\frac{d\frac{dy}{dx}}{dt} = ae^{-t}\frac{d\left(ae^{-t}\frac{dy}{dt}\right)}{dt} = a^2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$
(car une dérivée relative à x est toujours égale à une dérivée relative à t multipliée par ae^{-t}). – De même
$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d\frac{d^2y}{dx^2}}{dx} = ae^{-t}\frac{d\left\{a^2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right\}}{dt} = a^3e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$
et ainsi de suite, jusqu'à
$$\frac{d^my}{dx^m} = a^m e^{-mt}\left(\frac{d^my}{dt^m} + k\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}} + \ldots + H\frac{dy}{dt}\right)$$

K ... H étant des coefficients tous constants. Si donc on substitue dans l'Eq. (1), comme, dans chaque terme, $\frac{d^p y}{dx^p}$ amène e^{-pt}, et $(ax+b)^p$ amène l'inverse e^{pt}, les variables disparaissent, et il reste une équation linéaire à coefficients constants

$$\frac{d^m y}{dt^m} + M\frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + N\frac{d^{m-2} y}{dt^{m-2}} + \dots + S y = 0$$

on posera donc

$$h^m + M h^{m-1} + N h^{m-2} + \dots + S = 0$$

d'où m racines, $h_1\ h_2\ h_3 \dots h_m$, et l'intégrale sera

$$y = C_1 e^{h_1 t} + C_2 e^{h_2 t} + \dots + C_m e^{h_m t}$$

or $t = L(ax+b)$ et $ht = L(ax+b)^h$. Donc il vient,

$$y = C_1 e^{L(ax+b)^{h_1}} + C_2 e^{L(ax+b)^{h_2}} + \dots + C_m e^{L.(ax+b)^{h_m}}$$

ou

$$y = C_1 (ax+b)^{h_1} + C_2 (ax+b)^{h_2} + \dots + C_m (ax+b)^{h_m}$$

C'est là le résultat le plus remarquable auquel on soit parvenu dans le cas des coefficients variables.

Jusqu'ici, nous avons vu que l'Eq. linéaire sans second membre a une intégrale qui peut se mettre sous la forme

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots + C_m y_m$$

Il est possible de démontrer que l'intégrale générale est nécessairement de cette forme-là.

Pour cela, j'appelle y_1 une solution sans constante, mais quelconque d'ailleurs, de l'Eq. donnée (s'il y avait des constantes dans l'Eq. (1), on les particulariserait). — Proposons-nous de satisfaire à l'équation donnée par une valeur de y de la forme

$$y = C y_1$$

C étant une fonction inconnue de x : et il est évident d'ailleurs que $C y_1$ peut toujours être considéré comme représentant, quelle qu'elle soit, l'intégrale de la proposée. — Remarquons que, puisque

y_1 est solution, on a identiquement

$$(2)\quad \frac{d^m y_1}{dx^m} + P\frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + Q\frac{d^{m-2} y_1}{dx^{m-2}} + \dots + T\frac{dy_1}{dx} + Uy_1 = 0$$

et rappelons-nous l'égalité symbolique du calcul différentiel

$$d^n(uv) = (du + dv)^n = u\,d^n v + n\,du\,d^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2}d^2u\,d^{n-2}v + \dots + v\,d^n u$$

en posant $d^0 u = u$ et $d^0 v = v$. – Ici, $u = c$ et $v = y_1$. Donc

$$\frac{d^n(cy_1)}{dx^n} = c\frac{d^n y_1}{dx^n} + n\frac{dc}{dx}\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^2c}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}} + \text{etc.}$$

Prenons ainsi les coefficients de toutes les dérivées, et substituons-les dans l'Eq. proposée. Le coefficient de c sera nul d'après l'identité (2), on retombera donc sur une Eq. de la forme

$$\frac{d^m c}{dx^m} + P_1\frac{d^{m-1}c}{dx^{m-1}} + Q_1\frac{d^{m-2}c}{dx^{m-2}} + \dots + U_1\frac{dc}{dx} = 0$$

que l'on pourra abaisser en posant $\frac{dc}{dx} = u$. alors, on a l'Eq.

$$(2)\quad \frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + P_1\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \dots + U_1 u = 0$$

Mais, puisque $\frac{dc}{dx} = u$, on a

$$c = \int u\,dx + c_1$$

Donc l'intégrale devient

$$(3)\quad y = c_1 y_1 + y_1\int u\,dx$$

et ici, il est important de remarquer que, si l'on met pour u dans l'Eq. (3) l'intégrale générale de l'Eq. (2), on aura l'intégrale générale de la proposée (1). En effet, j'ai

$$\frac{y}{y_1} = c_1 + \int u\,dx$$

Donc

$$\frac{d\left(\frac{y}{y_1}\right)}{dx} = u,\quad \frac{d^2\left(\frac{y}{y_1}\right)}{dx^2} = \frac{du}{dx},\quad \dots\quad \frac{d^{m-1}\left(\frac{y}{y_1}\right)}{dx^{m-1}} = \frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}}$$

or, j'ai supposé u remplacé par l'intégrale générale de l'Eq. (2). Cela suppose que, pour $x = a$, je puisse disposer arbitrairement de u et de ses $(m-2)$ premières dérivées. Je pourrai donc disposer arbitrairement

des $(m-1)$ premières dérivées de $\frac{y}{y_1}$. D'ailleurs, à cause de C_1, la fonction $\frac{y}{y_1}$ est elle-même arbitraire : donc $\frac{y}{y_1}$ et ses $(m-1)$ premières dérivées, par suite, y et ses $(m-1)$ premières dérivées (puisque y_1 est une fonction déterminée) pourront être pris arbitrairement. Donc j'aurai bien l'intégrale générale de l'Eq. (1).

Cela posé, soit u_1 une solution de l'Eq. (2), sans constante. Je puis répéter sur cette Eq. (2) les mêmes raisonnements que j'ai faits sur l'Eq. (1) : et j'en déduirai

$$(2) \qquad u = C_2 u_1 + \int z\,dx$$

en posant

$$\frac{d\left(\frac{u}{u_1}\right)}{dx} = z$$

et z dépendra d'une Eq. linéaire de la forme

$$\frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}} + P_2 \frac{d^{m-3}z}{dx^{m-3}} + \cdots + U_2 z = 0$$

Substituons la valeur de u dans celle de y. Il viendra, en posant $y_2 = y_1 \int u_1 dx$,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_1 \int \left(u_1 \int z\,dx\right) dx$$

et d'ailleurs y_2 est bien évidemment une solution particulière de l'Eq. (1), puisque $y_2 = y_1 \int u_1 dx$, et que $y = y_1 \left\{ \int u\,dx + C_1 \right\}$ est l'intégrale générale de la proposée.

On peut visiblement poursuivre ainsi les raisonnements jusqu'au bout. Donc l'intégrale de l'Eq. (1) est bien de la forme

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \cdots + C_m y_m$$

C.q.f.d.

Corollaire. — Les Equations linéaires sans second membre n'ont jamais de solutions singulières.

En effet, en admettant que y_1 fût une solution singulière (sans constante), il est évident que je pourrais, dans la démonstration précédente, prendre cette solution pour point de départ, poser

$y = C y_1$, d'où l'intégrale générale $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_m y_m$
Donc la solution proposée n'est plus alors qu'une intégrale particulière, qu'on obtient en faisant $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = \dots = c_m = 0$.

II. Des Équations Linéaires avec Second membre.

Soit l'Équation

$$(1)\qquad \frac{d^m y}{dx^m} + P\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + Q\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \dots + T\frac{dy}{dx} + Uy = V.$$

Il y a d'abord un cas très simple à examiner, c'est celui où U et V sont constants. — alors, l'Équation s'écrit.

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \dots\dots + T\frac{dy}{dx} + U\left(y - \frac{V}{U}\right) = 0$$

alors, en posant $y - \frac{V}{U} = z$, ce qui ne change rien aux dérivées, on a

$$\frac{d^m z}{dx^m} + P\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \dots + T\frac{dz}{dx} + Uz = 0$$

et l'on est ramené au cas d'une Éq. Linéaire sans Second membre.

Remarquons encore un cas assez étendu où l'on peut simplifier la question. — Toutes les fois que, d'une manière quelconque, on apercevra une solution $y = X$, de façon qu'on ait

$$(2)\qquad \frac{d^m X}{dx^m} + P\frac{d^{m-1}X}{dx^{m-1}} + \dots + T\frac{dX}{dx} + UX = V$$

alors, on n'aura qu'à poser

$$y = X + z$$

en remarquant qu'en général on a

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \frac{d^p X}{dx^p} + \frac{d^p z}{dx^p}$$

on substituera dans la proposée les valeurs des divers coefficients

qui y entrent, et, en ayant égard à la condition (2), on aura

$$\frac{d^m z}{dx^m} + P\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \dots + T\frac{dz}{dx} + Vz = 0$$

et l'on est ramené encore à une équation sans second membre.

Exemples. Supposons que hormis V, tous les coefficients de l'Eq. (1) soient constants, et que V soit une fonction entière d'x, de la forme

$$V = Ax^p + Bx^{p-1} + \dots + Hx + K$$

de manière que l'Eq. (1) devienne

$$(1)\quad \frac{d^m y}{dx^m} + P\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \dots + T\frac{dy}{dx} + Vy = Ax^p + Bx^{p-1} + \dots + Hx + K$$

on peut prévoir qu'une solution de l'Eq. (1) s'obtiendra en général en posant

$$y = ax^p + bx^{p-1} + \dots + hx + k$$

a, b, .. h, k étant des coefficients qu'il s'agira de déterminer. - Et en effet, par la substitution de y et de ses dérivées dans le 1er. membre de l'Eq. (1), celui-ci prendra la forme

$$\alpha x^p + \beta x^{p-1} + \dots + \varepsilon x + \eta$$

et, en identifiant ce polynôme avec le 2e. membre de l'Eq. (1), on aura (p+1) équations, d'où, généralement, il sera possible de tirer les (p+1) coefficients inconnus a, b, .. h, k.

— On peut encore opérer de même dans certains cas où V a une forme différente de la précédente. Supposons par exemple

$$V = A\cos(nx+p) + B\sin(nx+p)$$

Comme les Cosinus et Sinus se reproduisent par la différentiation, nous chercherons pour y une valeur de la forme

$$y = a\cos(nx+p) + b\sin(nx+p)$$

car, en substituant, le 1er. membre de la proposée prendra nécessairement la forme

$$f(a,b)\cdot\cos(nx+p) + f_1(a,b)\cdot\sin(nx+p)$$

on posera

$$A = f(a,b) \qquad B = f_1(a,b)$$

et on tirera de là a et b.

— Si l'on avait simplement

$$V = A\cos(nx+p)$$

il faudrait encore chercher pour y une valeur de la forme $a\cos(nx+p) + b\sin(nx+p)$, attendu que les Sinus, par la différentiation, donnent des Sinus et des Cosinus: il y a un cas pourtant où l'on pourrait prendre simplement $y = a\cos(nx+p)$: c'est celui où la proposée ne renfermerait que des dérivées d'ordre pair.

— Supposons que l'on ait

$$V = Ae^{nx+p}$$

on pourrait chercher pour y une valeur de la forme

$$y = ae^{nx+p}$$

Exemple. - Soit l'Eq.

$$(1)\quad \frac{d^2y}{dx^2} - n^2 y = e^x + e^{2x+1}$$

Cherchons une solution de la forme

$$y = ae^x + be^{2x+1}$$

d'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ae^x + 4be^{2x+1}$$

Substituant et identifiant, on trouve

$$a - an^2 = 1 \qquad 4b - bn^2 = 1 \qquad \text{d'où}\quad a = \frac{1}{1-n^2} \qquad b = \frac{1}{4-n^2}$$

Donc une solution de l'Eq. (1) est

$$y_1 = \frac{e^x}{1-n^2} + \frac{e^{2x+1}}{4-n^2}$$

Maintenant, posons

$$y = y_1 + z$$

Nous savons qu'il nous restera à intégrer l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} - n^2 z = 0$$

qui donnera

$$z = C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx}$$

Donc l'intégrale générale de l'Eq. (1) est

$$(3) \quad y = \frac{e^x}{1-n^2} + \frac{e^{2x+1}}{4-n^2} + C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx}$$

Si $n=2$, la valeur de y_1 est infinie : c'est que la méthode est en défaut pour ce cas. Cependant, qq. voisin de 2 que soit n, l'Eq. (3) est l'intégrale générale. Cherchons à déduire de là une limite pour le cas de $n=2$. Or, nous avons dans l'intégrale le terme $C_1 e^{nx}$ que nous pouvons tout aussi bien écrire $C_1 e^{nx+1}$, ou bien encore $\left(C_1 - \frac{1}{4-n^2}\right) e^{nx+1}$, ou encore $C_1 e^{nx} - \frac{e^{nx+1}}{4-n^2}$; l'intégrale devient alors

$$y = \frac{e^x}{1-n^2} + \frac{e^{2x+1} - e^{nx+1}}{4-n^2} + C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx}$$

Le terme qui devenait infini devient maintenant $\frac{0}{0}$ pour $n=2$. On n'a plus qu'à le traiter à la manière ordinaire. Le rapport des dérivées est $\frac{xe^{nx+1}}{2n}$, et, pour $n=2$, il reste $\frac{xe^{2x+1}}{4}$: de façon que l'intégrale devient alors

$$y = -\frac{1}{3}e^x + \frac{x}{4}e^{2x+1} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

On trouverait un exemple analogue dans l'Eq.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - n^2 y = A \cos(px+q)$$

avec une discussion pour le cas de $p=n$.

Méthode de la variation des constantes (Lagrange).

Cette méthode a pour but et pour résultat de ramener dans tous les cas l'intégration d'une équation linéaire avec second membre à celle de la même équation sans second membre.

Prenons l'équation

$$(1) \quad \frac{d^my}{dx^m} + P\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + Vy = V$$

et supposons qu'ayant considéré à part l'équation

$$(2) \quad \frac{d^my}{dx^m} + P\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + Vy = 0$$

on eût trouvé son intégrale générale

$$(3) \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_m y_m$$

Supposons que, dans cette équation (3), les constantes c_1 c_2 .. c_m deviennent des fonctions de x, de manière que l'Eq. (3) devienne l'intégrale générale de l'Eq. (1). Nous donnant cette relation de condition entre ces m fonctions, nous pourrons nous en donner à volonté $(m-1)$ autres, que nous aurons soin de choisir de manière à rendre facile la détermination de ces fonctions. — Pour cela, nous différentierons $(m-1)$ fois l'Eq. (3), en égalant chaque fois à zéro les parties qui proviendront de la variation des constantes : celles-ci n'entreront dans ces Eq. de condition que par leurs différentielles premières : nous les pourrons donc obtenir par de simples quadratures. Nous aurons donc ainsi :

$$dy = c_1 dy_1 + \text{-------} + c_m dy_m$$

en posant

$$y_1 dc_1 + \text{---} \ \ \text{---} + y_m dc_m = 0$$

de cette valeur de dy, je tirerai

$$d^2y = c_1 d^2y_1 + \text{----} + c_m d^2 y_m$$

en posant

$$dy_1 dc_1 + \text{----} + dy_m dc_m = 0$$

et ainsi de suite. — J'aurai donc, pour mes $(m-1)$ Equations de condition

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} y_1 dc_1 + \text{----} + y_m dc_m = 0 \\ dy_1 dc_1 + \text{---} + dy_m dc_m = 0 \\ d^2y_1 dc_1 + \text{---} + d^2y_m dc_m = 0 \\ \text{---} \\ d^{m-2}y_1 dc_1 + \text{---} + d^{m-2}y_m dc_m = 0 \end{array} \right.$$

D'après la dernière de ces Equations, j'avais donc encore

$$d^{m-1}y = c_1 d^{m-1}y_1 + \text{---} + c_m d^{m-1}y_m$$

Mais de là je tirerai pour $d^m y$ une valeur où je ne pourrai plus annuler les termes provenant de la variation des constantes : et cette valeur sera

$$d^m y = \left\{ \begin{array}{l} c_1 d^m y_1 + \text{-----} + c_m d^m y_m \\ + d^{m-1}y_1 dc_1 + \text{---} + d^{m-1}y_m dc_m \end{array} \right.$$

Maintenant, pour dernière condition, il reste à exprimer que l'Eq. (1) est vérifiée quand on y remplace par leurs valeurs les divers coefficients différentiels qui y entrent. — or cette substitution me donnera

$$V = \left\{ \begin{array}{l} c_1 \left\{ \frac{d^m y_1}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + \cdots + U y_1 \right\} \\ + \cdots \\ + c_m \left\{ \frac{d^m y_m}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} + \cdots + U y_m \right\} \\ + \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} \cdot \frac{dc_1}{dx} + \cdots + \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} \cdot \frac{dc_m}{dx} \end{array} \right.$$

or maintenant, comme $y_1 \ldots y_m$ sont des solutions de l'Eq. (2), il s'ensuit qu'il reste seulement, pour dernière condition

$$(B) \qquad \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} \cdot \frac{dc_1}{dx} + \cdots + \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} \cdot \frac{dc_m}{dx} = V$$

Reste à trouver $c_1\ c_2 \ldots c_m$. or, rien n'est plus aisé. Sans entrer dans aucun détail d'élimination, je vois que les $(m-1)$ équations (A) me donneront $dc_2, dc_3, \ldots dc_m$ en fonction de dc_1.

$$(\alpha) \quad \left\{ \begin{array}{l} dc_2 = H_2\, dc_1 \\ dc_3 = H_3\, dc_1 \\ \vdots \\ dc_m = H_m\, dc_1 \end{array} \right.$$

Ces valeurs, reportées dans l'Eq. (B), donneront un résultat

$$\frac{dc_1}{dx} = X$$

d'où

$$c_1 = \int X\,dx + \alpha_1$$

et maintenant, les Equations (α) me donneront

$$c_2 = \int H_2 X\,dx + \alpha_2, \quad c_3 = \int H_3 X\,dx + \alpha_3, \ldots \quad c_m = \int H_m X\,dx + \alpha_m$$

L'Intégrale générale sera donc

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_m y_m + \left\{ y_1 \int X dx + y_2 \int H_2 X dx + \dots + y_m \int H_m X dx \right\}$$

elle est de la forme

$$y - \pi(x) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_m y_m$$

et l'on voit bien ainsi que c'est l'intégrale générale : car, par hypothèse, $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_m y_m$ étant l'intégrale générale de l'équation sans second membre, on pourra donc prendre à volonté $y - \pi(x)$ et ses $(m-1)$ premières dérivées : d'où il suit que y et ses $(m-1)$ premières dérivées seront aussi arbitraires.

Si, sauf V, tous les coefficients de la proposée sont constants, alors on peut effectuer les calculs. alors, en effet, $a_1, a_2 .. a_m$ étant les racines de l'équation

$$a^m + P a^{m-1} + Q a^{m-2} + \dots + T a + U = 0$$

on a

$$y_1 = e^{a_1 x}$$

$$\frac{dy_1}{dx} = a_1 e^{a_1 x}$$

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = a_1^2 e^{a_1 x}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} = a_1^{m-1} e^{a_1 x}$$

et de même pour $y_2\ y_3 .. y_m$. Les Eq. (A) et (B) deviennent donc alors

$$(E) \left\{ \begin{array}{l} e^{a_1 x} \dfrac{dc_1}{dx} + \dots + e^{a_m x} \dfrac{dc_m}{dx} = 0 \\ a_1 e^{a_1 x} \dfrac{dc_1}{dx} + \dots \quad \dots = 0 \\ a_1^2 e^{a_1 x} \dfrac{dc_1}{dx} + \dots \quad \dots = 0 \\ \vdots \\ a_1^{m-2} e^{a_1 x} \dfrac{dc_1}{dx} + \dots \quad \dots = 0 \\ a_1^{m-1} e^{a_1 x} \dfrac{dc_1}{dx} + \dots \quad \dots = V \end{array} \right.$$

Ces Équations sont toutes pareilles à celles-ci

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \cdots + c_m = b \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots\cdots = b' \\ a_1^2 c_1 + a_2^2 c_2 + \cdots\cdots = b'' \\ \cdots \\ a_1^{m-1} c_1 + \cdots\cdots = b^{(m-1)} \end{cases}$$

que nous avons déjà traitées, et qui nous ont donné

$$c_1 = \frac{kb + k'b' + \cdots + k^{(m-1)} b^{(m-1)} + b^{(m-1)}}{f'(a_1)}$$

en posant

$$f(a) = a^m + Pa^{m-1} + \cdots + Ta + V = 0$$

Donc ici, si nous prenons $e^{a_1 x}\frac{dc_1}{dx}$ et les quantités semblables pour inconnues, les Eq. (F) nous donneront les valeurs très simples

$$\begin{cases} \dfrac{dc_1}{dx} = \dfrac{Ve^{-a_1 x}}{f'(a_1)} \\ \dfrac{dc_2}{dx} = \dfrac{Ve^{-a_2 x}}{f'(a_2)} \\ \dfrac{dc_m}{dx} = \dfrac{Ve^{-a_m x}}{f'(a_m)} \end{cases}$$

D'où évidemment l'Intégrale

$$y = \alpha_1 e^{a_1 x} + \alpha_2 e^{a_2 x} + \cdots + \alpha_m e^{a_m x} + \left\{ \frac{e^{a_1 x}}{f'(a_1)} \int V e^{-a_1 x} dx + \cdots + \frac{e^{a_m x}}{f'(a_m)} \int V e^{-a_m x} dx \right\}$$

Revenons maintenant au cas Général.

Il pourrait se faire qu'on ne connût pas l'intégrale Générale de l'Eq. sans second membre, mais seulement (m-1) solutions particulières. – alors, partant de l'Intégrale (m-1)^e

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_{m-1} y_{m-1}$$

je ne pourrai plus me donner que $m-2$ relations entre les $(m-1)$ quantités $c_1\ c_2 \ldots c_{m-1}$. Les Eq. (A) deviendront donc

$$(A')\quad \begin{cases} y_1 dc_1 + \cdots + y_{m-1} dc_{m-1} = 0 \\ dy_1 dc_1 + \cdots + dy_{m-1} dc_{m-1} = 0 \\ d^2 y_1 dc_1 + \cdots + d^2 y_{m-1} dc_{m-1} = 0 \\ \cdots \\ d^{m-3} y_1 dc_1 + \cdots + d^{m-3} y_{m-1} dc_{m-1} = 0 \end{cases}$$

La dernière me donnera encore

$$d^{m-2} y = c_1 d^{m-2} y_1 + \cdots + c_{m-1} d^{m-2} y_{m-1}$$

valeur de même forme que les précédentes. Mais les deux suivantes seront

$$d^{m-1} y = \begin{cases} c_1 d^{m-1} y_1 + \cdots + c_{m-1} d^{m-1} y_{m-1} \\ + d^{m-2} y_1 dc_1 + \cdots + d^{m-2} y_{m-1} dc_{m-1} \end{cases}$$

$$d^m y = \begin{cases} c_1 d^m y_1 + \cdots + c_{m-1} d^m y_{m-1} \\ + 2 dc_1 d^{m-1} y_1 + \cdots + 2 dc_{m-1} d^{m-1} y_{m-1} \\ + d^2 c_1 d^{m-2} y_1 + \cdots + d^2 c_{m-1} d^{m-2} y_{m-1} \end{cases}$$

Reportant ces valeurs dans la proposée, $c_1\ c_2 \ldots c_{m-1}$ disparaîtront bien ici encore. Mais tous les termes provenant de la 2e ligne de $d^{m-1} y$, de la 2e et la 3e de $d^m y$, resteront, et nous aurons

$$(B')\quad \frac{d^{m-2} y_1}{dx^{m-2}} \cdot \frac{d^2 c_1}{dx^2} + \text{etc.} + \left(2 \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + P \frac{d^{m-2} y_1}{dx^{m-2}} \right) \frac{dc_1}{dx} + \text{etc.} = V.$$

en n'écrivant que les termes en y_1 et c_1, les autres ne différant de ceux-là que par leurs indices. — Cette Eq. (B') sera la $(m-1)^e$

de celles qui serviront à déterminer $c_1\ c_2 \ldots c_{m-1}$. — Maintenant, les Eq. (A') me donneront toujours

$$(\alpha')\quad \begin{cases} dc_2 = H_2\,dc_1 \\ dc_3 = H_3\,dc_1 \\ \vdots \\ dc_{m-1} = H_{m-1}\,dc_1 \end{cases}$$

et, en substituant, l'Eq. (B') prendra évidemment la forme

$$\frac{d^2c_1}{dx^2} + M\frac{dc_1}{dx} = N$$

D'où, en posant $\frac{dc_1}{dx} = z$

$$\frac{dz}{dx} + Mz = N$$

Equation linéaire du 1er. ordre que nous savons toujours intégrer, et qui donne

$$z = e^{-\int Mdx}\left(\int e^{\int Mdx} Ndx + \alpha\right)$$

Maintenant, on a

$$\begin{cases} c_1 = \int z\,dx + \alpha_1 \\ c_2 = \int H_2 z\,dx + \alpha_2 \\ \vdots \\ c_{m-1} = \int H_{m-1} z\,dx + \alpha_{m-1} \end{cases}$$

Chacune de ces valeurs contient une constante, outre celle qui entre dans z; en substituant, on aura donc bien m constantes dans l'intégrale générale.

Il est évident maintenant, et des calculs tout-à-fait semblables aux précédents conduiraient à ce résultat, que si l'on connaît seulement $m-2$ solutions de l'Eq. sans second membre, on sera ramené à intégrer une Equation linéaire du second ordre. — En général, connaissant $m-p$ solutions, on aura

à résoudre une équation linéaire d'ordre p.

Il est visible que ces raisonnements et ces calculs s'appliquent encore, en les simplifiant, au cas où $V = 0$, de façon que la méthode de la variation des constantes donne un moyen de trouver l'intégrale générale d'une Eq. linéaire sans second membre, quand on connaît m-p solutions de cette équation, pourvu qu'on sache intégrer l'Eq. linéaire d'ordre p.

En particulier, et comme exemple, prenons l'Eq. linéaire du second ordre

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = V$$

et supposons-y P et Q constants, V seulement fonction d'x. — Nous aurons d'abord à considérer l'Eq.

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$$

Pour trouver l'intégrale, nous poserons

$$(3) \qquad a^2 + Pa + Q = 0$$

d'où

$$\begin{cases} a = a_1 \\ a = a_2 \end{cases}$$

et l'intégrale de l'Eq. (2) est

$$y = C_1 e^{a_1 x} + C_2 e^{a_2 x}$$

Nous ne pourrons ici nous donner qu'une équation entre C_1 et C_2. Ce sera

$$(A) \qquad e^{a_1 x}\frac{dC_1}{dx} + e^{a_2 x}\frac{dC_2}{dx} = 0$$

alors, j'en déduirai

$$dy = a_1 C_1 e^{a_1 x} + a_2 C_2 e^{a_2 x}$$

$$d^2y = a_1^2 C_1 e^{a_1 x} + a_2^2 C_2 e^{a_2 x} + a_1 e^{a_1 x} dC_1 + a_2 e^{a_2 x} dC_2$$

Substituant dans l'équation (1), j'obtiens

$$(B) \qquad a_1 e^{a_1 x}\frac{dC_1}{dx} + a_2 e^{a_2 x}\frac{dC_2}{dx} = V$$

Les Eq. (A) et (B) me donnent, soit directement, soit par la formule très-simple qui a été trouvée,

$$e^{a_1 x}\frac{dC_1}{dx} = \frac{V}{a_1 - a_2} \qquad e^{a_2 x}\frac{dC_2}{dx} = \frac{V}{a_2 - a_1}$$

D'où

$$C_1 = \int \frac{Ve^{-a_1 x}}{a_1 - a_2}\,dx + C_1$$

ce qu'on peut écrire

$$C_1 = \frac{C_1 + \int Ve^{-a_1 x}dx}{a_1 - a_2} \qquad \text{et de même} \qquad C_2 = \frac{C_2 + \int Ve^{-a_2 x}dx}{a_2 - a_1}$$

L'intégrale est donc

$$(4) \qquad y = \frac{e^{a_1 x}\int e^{-a_1 x} V dx - e^{a_2 x}\int e^{-a_2 x} V dx + C_1 e^{a_1 x} - C_2 e^{a_2 x}}{a_1 - a_2}$$

Jusqu'ici, nous avons supposé a_1 différent de a_2. Ce n'est qu'à cette condition que $y = c_1 e^{a_1 x} + c_2 e^{a_2 x}$ était l'intégrale générale de l'Eq. (2). — Si $a_1 = a_2$, on n'a plus qu'une intégrale particulière. Alors, on retombe sur la méthode de la variation des constantes. — On a

$$y = c_1 e^{a_1 x}$$

on n'a aucune condition arbitraire à poser. — On tire delà

$$\frac{dy}{dx} = c_1 a_1 e^{a_1 x} + e^{a_1 x}\frac{dc_1}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = c_1 a_1^2 e^{a_1 x} + 2a_1 e^{a_1 x}\frac{dc_1}{dx} + e^{a_1 x}\frac{d^2c_1}{dx^2}$$

Substituant dans l'Eq. (1), il vient

$$\frac{d^2c_1}{dx^2} = e^{-a_1 x} V$$

d'où

$$\frac{dc_1}{dx} = \int e^{-a_1 x} V dx + \alpha_1, \qquad c_1 = \int\left[\alpha_1 + \int e^{-a_1 x} V dx\right]dx + \alpha_2 = \alpha_1 x + \alpha_2 + \int dx \int e^{-a_1 x} V dx$$

ou, en intégrant par parties,

$$c_1 = x\int e^{-a_1 x} V dx - \int x e^{-a_1 x} V dx + \alpha_1 x + \alpha_2$$

Reportant dans $y = c_1 e^{a_1 x}$, on a, pour l'intégrale générale quand $a_1 = a_2$,

$$(5) \qquad y = e^{a_1 x}\left(x\int e^{-a_1 x} V dx - \int x e^{-a_1 x} V dx\right) + e^{a_1 x}(\alpha_1 x + \alpha_2)$$

c'est là d'ailleurs identiquement le résultat qu'on aurait obtenu en employant d'abord la méthode de D'Alembert pour trouver l'intégrale générale de l'Eq. (2), et passant delà, par celle de Lagrange, à l'intégrale de l'Eq. (1).

Maintenant, on pourrait se demander s'il y a moyen de déduire l'intégrale (5) directement de l'intégrale (4). — Oui, et cela est facile : si nous ne l'avons pas indiqué en général, c'est uniquement à cause de la complication des calculs : mais ici, il est aisé de le faire. Remarquons en effet que, quelque voisin de a_1 que soit a_2, (4) est l'intégrale de (1), sans aucune impossibilité. On doit donc pouvoir déduire de (4) la limite de l'intégrale pour le cas de $a_2 = a_1$. — Or, pour $a_2 = a_1$, l'Eq. (4) prend une forme impossible, à moins que c_2 ne tende vers c_1 en même temps que a_2 vers a_1. Donc, comme cette absurdité de l'Eq. (4) ne peut subsister, il faut bien qu'il en soit réellement ainsi. Nous devons donc considérer c_2 comme une fonction, arbitraire sans doute, de a_2, de telle façon pourtant que $c_2 = c_1$ pour $a_2 = a_1$: c'est ce qui arrivera par exemple en supposant $c_2 = c_1 + (a_2 - a_1)\varphi(a_2)$, φ étant une fonction complètement arbitraire. — Cela une fois entendu, y prendra, pour $a_2 = a_1$, la forme $\frac{0}{0}$. Il n'y a plus rien là d'impossible. Cherchons la vraie valeur, et pour cela, prenons le rapport des dérivées des

deux termes par rapport à a_2, c_2 étant considéré comme une fonction de a_2. Ce rapport sera, comme la dérivée du dénominateur est -1,

$$x e^{a_2 x}\int e^{-a_2 x} V dx - e^{a_2 x}\int x e^{-a_2 x} V dx + c_2 e^{a_2 x} . x + e^{a_2 x}\frac{dc_2}{da_2}$$

et maintenant, pour $a_2 = a_1$, on a bien

$$y = e^{a_1 x}\left(x\int e^{-a_1 x} V dx - \int x e^{-a_1 x} V dx\right) + e^{a_1 x}\left(c_1 x + \mathcal{L}\right)$$

$\mathcal{L}$ étant une constante arbitraire à laquelle se réduit $\frac{dc_2}{da_2}$ pour $a_2 = a_1$. Car il est évident que, puisque c_2 était une fonction arbitraire de a_2, il en sera de même de $\frac{dc_2}{da_2}$, et, quand $a_2 = a_1$, on aura une fonction arbitraire d'une quantité constante, c'est-à-dire une constante arbitraire. — Or maintenant, l'expression ci-dessus est bien l'intégrale (5).

Intégration des Equations Différentielles par les Séries.

Il y a deux procédés généraux pour l'intégration par séries. Le premier consiste dans l'emploi de la Série de Taylor, le second, dans l'emploi de la Série de Maclaurin.

Par la Série de Taylor, l'intégrale devient, pour $x = x_0$

$$(1) \qquad y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x-x_0)^2}{1.2} + \cdots$$

Si l'équation différentielle est de l'ordre m, on prend arbitrairement y_0, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, ... $\left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_0$, et les dérivées suivantes se tirent de l'équation elle-même.

Pour des valeurs de x suffisamment voisines de x_0, la série sera convergente : quelquefois même il arrivera qu'elle le sera pour toute valeur d'x.

Quand la loi des termes sera assez simple, et qu'on pourra sommer la série, on aura l'intégrale sous forme finie. — Sinon, on ne l'aura plus qu'approximativement, et d'autant plus qu'on prendra un nombre plus considérable de termes.

La Série de Maclaurin donne, en faisant $x_0 = 0$ dans la précédente, et conservant pour abréger les mêmes notations en changeant leur sens :

$$(2) \qquad y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{x^2}{1.2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

Mais cette série est sujette à plus d'exceptions que celle de Taylor.

Pour que ces Séries donnent bien réellement l'intégrale Générale, il faut évidemment que, dans le Résultat, il y ait le nombre de Constantes nécessaires, et que par conséquent l'Équation donnée ne fasse pas prendre à quelques unes des Dérivées qu'on doit considérer comme arbitraires, des valeurs Déterminées. — C'est pourtant ce qui arrive quelquefois, et alors les Séries ne donnent plus que des Intégrales particulières.

Exemples.

1°. — Soit l'Équation

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + ay + bx^2 = 0$$

Cherchons à développer l'intégrale par la Série de Maclaurin. Pour $x = 0$, je puis prendre à volonté $y = y_0$. L'Éq. (1) me donne alors

$$\frac{dy}{dx} = -ay - bx^2, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -a\frac{dy}{dx} - 2bx = a^2y + abx^2 - 2bx,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = a^2\frac{dy}{dx} + 2abx - 2b = -a^3y - a^2bx^2 + 2abx - 2b \; ; \; \frac{d^4y}{dx^4} = -a^3\frac{dy}{dx} - 2a^2bx + 2ab = a^4y + a^3bx^2 - 2a^2bx + 2ab$$

d'où

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = -ay_0 \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = a^2y_0 \quad \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 = -a^3y_0 + 2b \quad \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_0 = a^4y_0 + 2ab.$$

En faisant ainsi le calcul, on ne voit pas bien la suite des Résultats. Faisons un peu autrement. L'Éq. (1) me donne, en la différentiant,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + 2bx = 0$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + a\frac{d^2y}{dx^2} + 2b = 0$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + a\frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} + a\frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

etc.

D'où l'on tire les mêmes valeurs que tout-à-l'heure ; seulement, on voit bien ici qu'à partir de $\frac{d^4y}{dx^4}$, chaque coefficient différentiel s'obtiendra en multipliant le précédent par $-a$. Nous aurons donc pour Intégrale

$$y = y_0\left\{1 - ax + \frac{a^2x^2}{1.2} - \frac{a^3x^3}{1.2.3} + \text{etc}\right\} - 2b\left\{\frac{x^3}{1.2.3} - \frac{ax^4}{1.2.3.4} + \frac{a^2x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}\right\}$$

La 1ère. parenthèse est le Développement de e^{-ax} ; la seconde, multipliée par a^3 et changée de signe, donne $e^{-ax} - \left(1 - ax + \frac{a^2x^2}{1.2}\right)$. Donc

$$y = y_0 e^{-ax} + \frac{2b}{a^3}\left(e^{-ax} - 1 + ax - \frac{a^2x^2}{1.2}\right)$$

est l'intégrale générale obtenue sous forme finie. En posant

$$y_0 + 2\frac{b}{a^3} = C$$

elle devient

$$y = Ce^{-ax} - \frac{2b}{a^3}\left(\frac{a^2x^2}{1.2} - ax + 1\right)$$

C'est ce que l'on trouverait en intégrant directement l'Eq. (1) qui est linéaire et du 1er ordre.

2°. Soit l'Equation

$$(1) \qquad x\frac{dy}{dx} + ay + bx^2 = 0$$

Pour $x=0$, cette Eq. me donne $y=0$, à moins que $\frac{dy}{dx}$ ne soit infini, ce que nous ne pouvons supposer. L'Eq. (1) a donc une intégrale non développable par la Série de Maclaurin, et cette série ne donnera tout au plus qu'une intégrale particulière ou une solution singulière. — Faisons le calcul. L'Eq. (1) donne

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \left.\begin{matrix}1\\+a\end{matrix}\right|\frac{dy}{dx} + 2bx = 0$$

$$x\frac{d^3y}{dx^3} + \left.\begin{matrix}2\\+a\end{matrix}\right|\frac{d^2y}{dx^2} + 2b = 0$$

$$x\frac{d^4y}{dx^4} + \left.\begin{matrix}3\\+a\end{matrix}\right|\frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

La loi est évidente; je tire de là

pour $x=0$: $\quad y=0, \quad \frac{dy}{dx}=0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2b}{a+2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}=0$

et toutes les dérivées suivantes sont visiblement nulles. On a donc simplement, par la série de Maclaurin,

$$y = -\frac{bx^2}{a+2}$$

Quant à l'intégrale générale, on peut la trouver en posant $y = -\frac{bx^2}{a+2} + z$, on trouvera

$$y = Cx^{-a} - \frac{bx^2}{a+2}$$

3°. Soit l'Equation

$$(1) \qquad x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + n^2xy = 0$$

Pour $x=0$, on voit qu'on peut prendre à volonté $y=y_0$; mais que $\frac{dy}{dx}$ est nécessairement nul. Donc on n'aura pas ainsi toute la généralité voulue. — Si l'on effectue les calculs, on verra facilement que

$$\left(\frac{d^{2k+1}y}{dx^{2k+1}}\right)_0 = 0 \qquad \left(\frac{d^{2p}y}{dx^{2p}}\right)_0 = \pm\frac{n^{2p}y}{2p+1} \qquad \left\{\begin{matrix}+ \text{ pour } p=2h\\ - \text{ pour } p=2h+1\end{matrix}\right.$$

D'après cela nous aurons
$$y = y_0 \left\{ 1 - \frac{n^2 x^2}{1.2.3} + \frac{n^4 x^4}{1.2.3.4.5} - \text{etc} \right\}$$
$$y = \frac{y_0}{nx} \left\{ nx - \frac{n^3 x^3}{1.2.3} + \frac{n^5 x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc} \right\}$$
$$y = \frac{y_0}{n} \cdot \frac{\sin . nx}{x}$$
$$y = \frac{C \sin nx}{x}$$

Ce résultat est une Intégrale particulière de la forme $y = Cy_1$. — on peut partir de là pour avoir l'Intégrale Générale par la méthode de la variation des Constantes.

Nous avons
$$y = Cy_1 \qquad y_1 = \frac{\sin nx}{x}$$

D'où nous tirerons (sans effectuer)
$$\frac{dy}{dx} = C\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{dc}{dx}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = C\frac{d^2y_1}{dx^2} + 2\frac{dy_1}{dx}\frac{dc}{dx} + y_1\frac{d^2c}{dx^2}$$

Substituant dans l'Eq. (1), il vient
$$xy_1\frac{d^2c}{dx^2} + \left.\begin{array}{l} 2x\dfrac{dy_1}{dx} \\ +2y_1 \end{array}\right| \frac{dc}{dx} = 0$$

en posant $\frac{dc}{dx} = u$, il vient
$$xy_1\frac{du}{dx} + 2\left(x\frac{dy_1}{dx} + y_1\right)u = 0$$

or $xy_1 = \sin . nx$, d'où $x\frac{dy_1}{dx} + y_1 = n\cos nx$. Donc il reste
$$-\frac{du}{u} = \frac{2n\cos nx\, dx}{\sin nx} = 2\frac{d.\sin nx}{\sin nx}$$
$$\mathcal{L}u = \mathcal{L}.(\sin nx)^{-2} + \mathcal{L}C_1$$
$$u = \frac{C_1}{\sin^2 nx}$$

Donc
$$C = C_1\int\frac{dx}{\sin^2 nx} + C_2 = C_1 \cot . nx + C_2$$

Donc l'intégrale Générale est
$$y = \frac{A\sin nx + B\cos nx}{x}$$

Cette Eq. (1) aurait pu s'intégrer directement par un artifice de calcul, en posant
$$xy = u$$
d'où
$$x\frac{dy}{dx} + y = \frac{du}{dx}$$
$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2}$$

Reportant cette dernière valeur dans l'Eq. (1), elle devient

$$\frac{d^2u}{dx^2} + n^2u = 0$$

dont on connait l'intégrale

$$u = A \cos nx + B \sin nx$$

d'où

$$y = \frac{A \cos nx + B \sin nx}{x}$$

c'est ce qu'on avait trouvé autrement.

Equations Linéaires Simultanées.

Prenons d'abord des Equations sans second membre et du 1er degré ordre

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + Py + Qz + Ru &= 0 \\ \frac{dz}{dx} + P'y + Q'z + R'u &= 0 \\ \frac{du}{dx} + P''y + Q''z + R''u &= 0 \end{aligned}\right\}$$

et supposons les Coefficients constants. on peut encore ici chercher pour y, z, u des valeurs de la forme e^{mx}. Car, si l'on pose

$$y = e^{mx} \qquad z = \mu e^{mx} \qquad u = \nu e^{mx}$$

si l'on différentie et si l'on substitue, les exponentielles disparaissent, et il reste trois Equations entre trois Inconnues μ, ν et m : ce sera

$$\left.\begin{aligned} m + P + Q\mu + R\nu &= 0 \\ P' + (m+Q')\mu + R'\nu &= 0 \\ P'' + Q''\mu + (m+R'')\nu &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Ces trois Equations déterminent μ, ν, et m. Supposons que des deux dernières on tire μ et ν. on aura pour ces Inconnues des valeurs fractionnaires dont le dénominateur contient m^2. Donc on arrivera à une Equation en m du 3e. degré.

Il y aura donc pour m trois valeurs, réelles ou imaginaires, m_1, m_2, m_3, et des valeurs correspondantes de μ et ν, c.à.d. μ_1 et ν_1, μ_2 et ν_2, μ_3 et ν_3. Alors trois systèmes de solutions particulières

$y_1 = e^{m_1 x}$	$y_2 = e^{m_2 x}$	$y_3 = e^{m_3 x}$
$z_1 = \mu_1 e^{m_1 x}$	$z_2 = \mu_2 e^{m_2 x}$	$z_3 = \mu_3 e^{m_3 x}$
$u_1 = \nu_1 e^{m_1 x}$	$u_2 = \nu_2 e^{m_2 x}$	$u_3 = \nu_3 e^{m_3 x}$

et alors, les trois intégrales générales sont

$$\begin{cases} y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x} \\ z = C_1 \mu_1 e^{m_1 x} + C_2 \mu_2 e^{m_2 x} + C_3 \mu_3 e^{m_3 x} \\ u = C_1 \nu_1 e^{m_1 x} + C_2 \nu_2 e^{m_2 x} + C_3 \nu_3 e^{m_3 x} \end{cases}$$

Si les coefficients ne sont pas constants, il n'y a pas de procédé général d'intégration.

Prenons le cas général, où les seconds membres ne sont pas nuls :

$$(1) \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + Py + Qz + Ru = V \\ \dfrac{dz}{dx} + P'y + Q'z + R'u = V' \\ \dfrac{du}{dx} + P''y + Q''z + R''u = V'' \end{cases}$$

on peut encore employer la méthode de la Variation des Constantes.

Supposons qu'on ait pu intégrer les Equations sans second membre, et qu'on ait eu

$$(2) \quad \begin{cases} y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \\ z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 \\ u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 \end{cases}$$

Cherchons à déterminer c_1 c_2 c_3 de manière que les valeurs (2) satisfassent les Equations (1). Celles-ci sont au nombre de trois : Donc nous ne pouvons nous donner aucune condition arbitraire. — Différentions les Eq. (2) : il viendra :

$$\begin{cases} dy = c_1 dy_1 + c_2 dy_2 + c_3 dy_3 + y_1 dc_1 + y_2 dc_2 + y_3 dc_3 \\ dz = c_1 dz_1 + c_2 dz_2 + c_3 dz_3 + z_1 dc_1 + z_2 dc_2 + z_3 dc_3 \\ du = c_1 du_1 + c_2 du_2 + c_3 du_3 + u_1 dc_1 + u_2 dc_2 + u_3 dc_3 \end{cases}$$

Substituant dans les Equations (1), on voit facilement qu'il reste :

$$(3) \quad \begin{cases} y_1 \frac{dc_1}{dx} + y_2 \frac{dc_2}{dx} + y_3 \frac{dc_3}{dx} = V \\ z_1 \frac{dc_1}{dx} + z_2 \frac{dc_2}{dx} + z_3 \frac{dc_3}{dx} = V' \\ u_1 \frac{dc_1}{dx} + u_2 \frac{dc_2}{dx} + u_3 \frac{dc_3}{dx} = V'' \end{cases}$$

Ces Equations serviront à trouver c_1 c_2 c_3 : et ces Eq. ne seront pas incompatibles. Car, puisque les Eq. (2) sont les intégrales générales des Eq. (1) privées de second membre, il s'ensuit que, dans ces intégrales (2), on peut, pour x quelconque, prendre arbitrairement y, z, u et trouver sans impossibilité les trois constantes. Or, si l'on compare les Eq. (1) avec les Eq. (3), on voit qu'il n'y a de différence qu'en ce que les seconds membres de celles-ci, au lieu d'être y, z, u, sont

sont V, V' et V''. Donc les Eq. (3) ne seront pas incompatibles si les Eq. (2) ne le sont pas. — On pourra donc résoudre ces Eq. et en tirer

$$\frac{dc_1}{dx} = X_1 \qquad \frac{dc_2}{dx} = X_2 \qquad \frac{dc_3}{dx} = X_3$$

D'où

$$c_1 = \int X_1 dx + \alpha_1 \qquad c_2 = \int X_2 dx + \alpha_2 \qquad c_3 = \int X_3 dx + \alpha_3$$

Substituant dans les Equations (2), on aura les Intégrales Générales du Système (1).

D'alembert a donné une autre méthode, qui n'exige pas qu'on sache trouver les Intégrales des Equations sans second membre. Elle repose sur l'emploi d'indéterminées qui ont pour effet de séparer les variables.

Reprenons les Equations Générales :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + Py + Qz + Ru = V \\[2mm] \dfrac{dz}{dx} + P'y + Q'z + R'u = V' \\[2mm] \dfrac{du}{dx} + P''y + Q''z + R''u = V'' \end{cases}$$

Multiplions la seconde par θ, la 3e par θ' et ajoutons. On aura

$$\frac{dy}{dx} + \theta\frac{dz}{dx} + \theta'\frac{du}{dx} + \left(P + P'\theta + P''\theta'\right)y + \left(Q + Q'\theta + Q''\theta'\right)z + \left(R + R'\theta + R''\theta'\right)u = V + V'\theta + V''\theta'$$

Si θ et θ' étaient constants, les trois premiers termes seraient la dérivée du trinôme $(y + \theta z + \theta' u)$: sinon, ils n'en seront qu'une partie. Posons

$$y + \theta z + \theta' u = t$$

$$y + \theta z + \theta' u = t$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} + \theta\frac{dz}{dx} + \theta'\frac{du}{dx} = \frac{dt}{dx} - z\frac{d\theta}{dx} - u\frac{d\theta'}{dx}$$

D'ailleurs

$$y = t - \theta z - \theta' u$$

Si l'on reporte dans l'Eq. précédente, on en aura une autre

$$\frac{dt}{dx} - z\frac{d\theta}{dx} - u\frac{d\theta'}{dx} + (P+P'\theta+P''\theta')(t-\theta z-\theta' u) + (Q+Q'\theta+Q''\theta')z + (R+R'\theta+R''\theta')u = V+V'\theta+V''\theta'$$

dont y ne fait plus partie.

Maintenant, on peut disposer de θ et de θ' de manière à annuler les coefficients de z et de u. Il faut pour cela que l'on ait

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\theta}{dx} + (P+P'\theta+P''\theta')\theta - (Q+Q'\theta+Q''\theta') = 0 \\ &\frac{d\theta'}{dx} + (P+P'\theta+P''\theta')\theta' - (R+R'\theta+R''\theta') = 0 \\ &\text{et alors, l'Eq. précédente se réduit à} \\ &\frac{dt}{dx} + (P+P'\theta+P''\theta')t = V+V'\theta+V''\theta' \end{aligned}\right\}$$

Les 2 prem. de ces Eq. montrent que l'on n'aurait pu prendre θ et θ' constants : car leurs valeurs sont fonction de $P, P' .. Q .. R ..$, c.à.d. de quantités qui contiennent x, à moins que les Eq. (1) n'aient leurs coefficients constants.

Nous avons donc à résoudre ces trois dernières Equations. Les deux premières ne contiennent plus que θ et θ' simultanément avec x (de façon que si l'on n'avait eu que deux variables, la séparation serait effectuée). Mais ces Eq. ne sont pas linéaires, et l'on ne sait pas les intégrer en général. Or, cela n'est pas nécessaire. — Soient seulement θ_1 et θ'_1 deux valeurs qui satisfassent aux deux premières Equations. Si je les reporte dans la 3e en t, j'aurai une Eq. Linéaire et du 1er. ordre en t : donc elle s'intégrera. Cette Equation est, en posant $P+P'\theta+P''\theta' = -m$ et $V+V'\theta+V''\theta' = T$

$$\frac{dt}{dx} - mt = T$$

d'où

$$t = e^{\int m\,dx}\left(\int e^{-\int m\,dx}\, T\,dx + C\right)$$

or θ_1 et θ'_1 ne sont que des valeurs particulières de θ et θ'. on n'a donc aussi qu'une valeur particulière de t, et l'on doit écrire

$$t_1 = e^{\int m_1 dx}\left(\int e^{-\int m_1 dx} T_1 dx + C_1\right)$$

Si l'on connaît deux autres groupes (θ_2, θ'_2) et (θ_3, θ'_3) on en déduira t_2 et t_3, d'où

$$\left\{\begin{array}{l} y + \theta_1 z + \theta'_1 u = t_1 \\ y + \theta_2 z + \theta'_2 u = t_2 \\ y + \theta_3 z + \theta'_3 u = t_3 \end{array}\right.$$

en résolvant ces trois équations, on en tirera y, z et u, et le problème sera résolu.

Mais tout cela suppose que l'on sache trouver trois couples de valeurs pour θ et θ'. — Si les coefficients des équations données sont constants, on le pourra. alors en effet, on peut supposer que θ et θ' sont constants. alors, $\frac{d\theta}{dx}$ et $\frac{d\theta'}{dx}$ s'en vont, et l'on peut trouver θ et θ'. En effet, nous avons posé

$$P + P'\theta + P''\theta' = -m$$

ou

$$P + P'\theta + P''\theta' + m = 0$$

alors, les deux équations en θ et θ' deviennent

$$(m + Q')\,\theta + Q''\theta' + Q = 0$$

$$(m + R'')\,\theta' + R'\theta + R = 0$$

Cela fait 3 Eq. en θ, θ' et m. Les deux dernières sont du 1er. degré en θ et θ': si on tire leurs valeurs et qu'on les reporte dans la 1ere, on aura une équation du 3e. degré en m.

Chacune des trois valeurs correspondantes de m, étant reportée à son tour dans les deux dernières, donnera un groupe de valeurs de θ et θ'. — L'intégration s'achève aisément.

Particularisons : — Supposons qu'il n'y ait que deux fonctions, et que les équations soient

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + Py + Qz = V \\ \dfrac{dz}{dx} + P'y + Q'z = V' \end{cases}$$

Multiplions la seconde par θ^+, ajoutons, et posons

$$y + \theta z = t$$

il vient d'où,

$$\frac{dy}{dx} + \theta\frac{dz}{dx} = \frac{dt}{dx} - z\frac{d\theta}{dx}$$

Il viendra

$$\frac{dt}{dx} - mt = T$$

en supposant

$$P + P'\theta = -m$$

$$V + V'\theta = T$$

et avec l'Eq. de condition obtenue en égalant à zéro le coeff. de z :

$$\frac{d\theta}{dx} + (P+P'\theta)\theta - (Q+Q'\theta) = 0$$

Il suffit de trouver deux valeurs, θ_1 et θ_2, qui satisfassent cette équation.

Si les coefficients sont constants, l'Eq. en θ devient

$$(P + P'\theta)\theta - Q - Q'\theta = 0$$

elle est du 2e degré, et fournit les deux valeurs θ_1 et θ_2. Si elles étaient égales, on emploierait la méthode générale, et l'on trouverait aisément les valeurs limites de y et z.

on peut faire autrement. L'Eq. en θ peut alors s'écrire

$$P'(\theta-\theta_1)^2=0$$

alors, l'Eq. Générale en θ, où l'on ne suppose pas θ constant, devient

$$\frac{d\theta}{dx}+P'(\theta-\theta_1)^2=0$$

or on sait intégrer. car cette Equation s'écrira

$$-\frac{d\theta}{(\theta-\theta_1)^2}=P'dx$$

d'où

$$\frac{1}{\theta-\theta_1}=C+P'x$$

$$\theta=\theta_1+\frac{1}{C+P'x}$$

Mais maintenant, nous n'avons besoin que de deux valeurs de θ. Faisons $C=0$ et $C=\infty$, nous aurons

$$\theta=\theta_1 \quad \text{et} \quad \theta=\theta_1+\frac{1}{P'x}$$

et il ne reste plus qu'à suivre la méthode Générale.

Enfin, si les racines de l'Eq. en θ sont imaginaires, on peut faire disparaître le signe $\sqrt{-1}$. Ces deux racines étant $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, on aura en général:

$$\frac{d\theta}{dx}+P'\left\{(\theta-\alpha)^2+\beta^2\right\}=0$$

Intégrons

$$\frac{d\theta}{(\theta-\alpha)^2+\beta^2}=-P'dx$$

$$\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\frac{d\theta}{\beta}}{1+\left(\frac{\theta-\alpha}{\beta}\right)^2}=-P'dx$$

$$\text{arc Tg}\,\frac{\theta-\alpha}{\beta}=(C-P'x)\beta$$

d'où

$$\theta - \alpha = \beta\, \mathrm{Tg}\,.\, \beta(C - P'x)$$

Pour avoir deux valeurs particulières, nous poserons $\beta C = 0$ et $\beta C = \frac{\pi}{2}$, d'où

$$\begin{cases} \theta_1 = \alpha - \beta\, \mathrm{Tg}.P'x \\ \theta_2 = \alpha + \beta\, \mathrm{Cot}.P'x \end{cases}$$

et la méthode s'achève aisément.

Exemple. — Prenons les deux équations :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} + 9y - 2x = 0 \\ \frac{dy}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} - 6x + y = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t^4+4}} = \varphi(t) \end{cases}$$

Commençons par les ramener au 1er. ordre. Posons

$$\frac{dx}{dt} = x'$$

alors on a

$$\left.\begin{aligned} x' - 2\frac{dy}{dt} + 9y - 2x = 0 \\ \frac{dy}{dt} - \frac{dx'}{dt} + 5x' - 6x + y = \varphi(t) \end{aligned}\right\}$$

Résolvant par rapport aux dérivées

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - x' = 0 \\ \frac{dy}{dt} - \frac{1}{2}x' - \frac{9}{2}y + x = 0 \\ \frac{dx'}{dt} - \frac{11}{2}x' - \frac{11}{2}y + 7x = -\varphi(t) \end{cases}$$

Maintenant, la méthode de d'Alembert s'applique. Je pose

$$x + \theta y + \theta' x' = z$$

et je ramène le problème au calcul de z. — On posera aussi

$$\theta + 7\theta' = m$$

on trouve d'ailleurs

$$\theta = \frac{11}{2m^2 + 20m + 44} \qquad \theta' = -\frac{2m+9}{2m^2+20m+44}$$

Reportant dans la précédente, on a

$$2m^3 + 20m^2 + 54m + 52 = 0$$

qui a une racine entière

$$m_1 = -2$$

et deux irrationnelles

$$m_2, m_3 = -4 \pm \sqrt{3}$$

et le calcul s'achève.
on a en effet à intégrer une Eq. linéaire en z

$$\frac{dz}{dt} + mz = -\theta' q(t)$$

ce qu'on l'on sait faire.

Enfin, il est bon de remarquer que les Equations linéaires peuvent s'intégrer par la méthode de la variation des constantes sans qu'il soit besoin de les ramener au 1er. ordre.

Reprenons celles de l'Exemple précédent :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 2\dfrac{dy}{dt} + 9y - 2x = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{d^2x}{dt^2} + 5\dfrac{dx}{dt} - 6x + y = q(t) \end{cases}$$

Laissons les Equations telles qu'elles sont : - et, supposant pour un instant les seconds membres nuls, cherchons des solutions de la forme

$$x = e^{mt} \qquad y = \mu e^{mt}$$

Il est évident que la méthode connue s'applique ici. on trouve

$$\mu = \frac{m^2 - 5m + 6}{1 + m}$$

avec

$$(m-2)(1+m) - (2m-9)(m^2 - 5m + 6) = 0$$

Cette dernière Eq. est du 3e. degré. C'est la même qu'on avait tout-à-l'heure, seulement, on voit que $m=2$ est racine. Les deux autres sont $m_2 = 4 + \sqrt{7}$, $m_3 = 4 - \sqrt{7}$.

on a donc

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{m_2 t} + C_3 e^{m_3 t} \\ y = \phantom{C_1 e^{2t} +} C_2 \mu_2 e^{m_2 t} + C_3 \mu_3 e^{m_3 t} \end{cases}$$

Ce sont là les Intégrales des Equations sans second membre. alors, on employe la méthode de la Variation des Constantes, et ici on peut se donner une Condition, qui sera par exemple

$$e^{2t} dc_1 + e^{m_1 t} dc_2 + e^{m_2 t} dc_3 = 0$$

on aura avec cela deux équations, on pourra donc trouver les trois Inconnues C_1 C_2 C_3.

Equations aux Différences Partielles.

Commençons par quelques préliminaires sur l'origine de ces Equations.

Quand on a une Equation

$$f(x, y, c) = 0$$

contenant un paramètre c, on sait qu'on peut l'éliminer. L'Eq. qu'on obtient alors est une Eq. aux différences partielles.

Si l'on a

$$(1) \quad f\{x, y, z, \varphi(\alpha)\} = 0$$

α étant de la forme

$$\alpha = \psi(x, y, z)$$

on peut éliminer complètement la fonction φ. — Cette Eq. (1), pour une valeur donnée de φ, représente une Surface : et, quand φ varie, on a une série de surfaces, ayant pour caractère commun que α reste le même pour toutes.

Cette Eq. (1) est d'ailleurs de la forme

$$\beta = \varphi(\alpha) \qquad \text{si } \beta = \chi(x, y, z)$$

c. à d.

$$\chi(x, y, z) = \varphi\{\psi(x, y, z)\},$$

Prenons l'Eq. (1). — Je dis qu'on peut éliminer φ.

En effet, en différentiant par rapport à x et y successivement, et posant $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dy}=q$, on aura

$$\frac{df}{dx}+p\frac{df}{dz}+\frac{df}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\alpha}\left\{\frac{d\alpha}{dx}+p\frac{d\alpha}{dz}\right\}=0$$

$$\frac{df}{dy}+q\frac{df}{dz}+\frac{df}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\alpha}\left\{\frac{d\alpha}{dy}+q\frac{d\alpha}{dz}\right\}=0$$

Ces deux équations et l'Eq. (1) contiennent φ et $\frac{d\varphi}{d\alpha}$. On pourra les éliminer, et l'on aura une équation du 1er. ordre, où p et q entreront à de certaines puissances.

Si l'équation avait été résolue par rapport à φ :

$$\beta=\varphi(\alpha)\qquad\left\{\begin{array}{l}\alpha=\psi(x,y,z)\\ \beta=\chi(x,y,z)\end{array}\right.$$

le calcul se serait simplifié. Car, en différentiant, on a

$$\frac{d\beta}{dx}+p\frac{d\beta}{dz}=\frac{d\varphi}{d\alpha}\left\{\frac{d\alpha}{dx}+p\frac{d\alpha}{dz}\right\}$$

$$\frac{d\beta}{dy}+q\frac{d\beta}{dz}=\frac{d\varphi}{d\alpha}\left\{\frac{d\alpha}{dy}+q\frac{d\alpha}{dz}\right\}$$

Ces équations ne contiennent plus φ : divisant membre à membre, $\frac{d\varphi}{d\alpha}$ disparaît, et l'on aura

$$\left\{\frac{d\beta}{dx}+p\frac{d\beta}{dz}\right\}\left\{\frac{d\alpha}{dy}+q\frac{d\alpha}{dz}\right\}-\left\{\frac{d\beta}{dy}+q\frac{d\beta}{dz}\right\}\left\{\frac{d\alpha}{dx}+p\frac{d\alpha}{dz}\right\}=0$$

On peut simplifier; les termes en pq disparaissent, et il reste

$$p\left\{\frac{d\beta}{dz}\cdot\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\alpha}{dz}\cdot\frac{d\beta}{dy}\right\}+q\left\{\frac{d\beta}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\beta}{dz}\right\}=\frac{d\beta}{dy}\cdot\frac{d\alpha}{dx}-\frac{d\beta}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy}$$

Équation de la forme

$$Pp+Qq=R\qquad(2)$$

P, Q, R étant des fonctions données d'x, y et z, ne contenant ni p ni q. — On l'appelle équation aux

Différences Partielles (mieux : aux Différentielles ou aux Dérivées partielles).

Cette Equation exprime une propriété du plan tangent aux Surfaces que représente l'Eq. (1).

Supposons maintenant qu'on ait

$$f(x, y, z, \varphi(\alpha), \psi(\beta)) = 0$$

φ et ψ étant deux fonctions arbitraires, α et β deux fonctions déterminées de x, y et z. à quel ordre faudra-t-il descendre pour éliminer φ et ψ ? Nous avons une Equation, et deux Inconnues φ et ψ. Différentions en x et y : nous aurons deux Equations de plus, et deux Inconnues nouvelles, $\frac{d\varphi}{d\alpha}$ et $\frac{d\psi}{d\beta}$. – En descendant au second ordre, on aura trois Equations de plus, et deux Inconnues, $\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}$ et $\frac{d^2\psi}{d\beta^2}$; six Equations et six Inconnues. En arrivant au 3e. ordre, on aura 4 Eq.^s de plus, et seulement deux Inconnues, $\frac{d^3\varphi}{d\alpha^3}$ et $\frac{d^3\psi}{d\beta^3}$: en tout 10 Equations et 8 inconnues. ainsi, en descendant au 3e. ordre, on pourra éliminer les deux fonctions, mais en général, il ne suffit pas de s'arrêter au second.

Si par exemple on avait

$$z = \varphi(x+ay) + \psi(x-ay)$$

il suffirait de descendre au second ordre. Car, en différentiant, on a

$$\frac{dz}{dx} = \varphi'(x+ay) + \psi'(x-ay) \qquad \frac{dz}{dy} = a\{\varphi'(x+ay) - \psi'(x+ay)\}$$

différentiant encore

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \varphi''(x+ay) + \psi''(x-ay) \qquad \frac{d^2z}{dy^2} = a^2\{\varphi''(x+ay) + \psi''(x-ay)\}$$

d'où

$$\frac{d^2z}{dx^2} = a^2\,\frac{d^2z}{dy^2}$$

il a suffi de descendre au 2^d. ordre.

En général, supposons qu'on ait n fonctions arbitraires. — Supposons qu'on différentie x fois, nous aurons $n + nx$ ou $n(x+1)$ inconnues, et $1+2+3+4+\cdots+(x+1)$ ou $\frac{(x+1)(x+2)}{2}$ équations.

Donc il faut que l'on ait

$$\frac{(x+1)(x+2)}{2} > n\,(x+1)$$

$$x+2 > 2n$$

$$x > 2n-2$$

Donc en général, il suffira de différentier $2n-1$ fois.

Il peut arriver qu'on ait besoin d'un moins grand nombre de différentiations. ainsi, soit

$$f\left\{x, y, z, \varphi(\alpha), \psi(\beta), \pi(\gamma), \ldots\right\} = 0$$

si α, β, γ.. ne renferment pas x, il est clair qu'en différentiant par rapport à x, on n'introduit pas de nouvelle inconnue : il suffira donc de différentier n fois par rapport à x seulement.

Si l'on donnait

$$\gamma = \varphi(\alpha, \beta)$$

il ne serait pas possible d'éliminer φ, parce que chaque différentiation introduirait autant d'inconnues que d'équations.

Supposons maintenant qu'il y ait trois variables indépendantes, x, y, z, et que u soit la fonction.

Je dis que si l'on a

$$\gamma = \varphi(\alpha, \beta)$$

(et si l'on avait $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ ce serait la même chose) .. on peut éliminer φ.

En effet, en différentiant, on aura :

$$\frac{d\gamma}{dx} + p\frac{d\gamma}{du} = \frac{d\varphi}{d\alpha}\left(\frac{d\alpha}{dx} + p\frac{d\alpha}{du}\right) + \frac{d\varphi}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dx} + p\frac{d\beta}{du}\right)$$

Eq. de la forme
$$A\frac{d\varphi}{d\alpha} + B\frac{d\varphi}{d\beta} + C = 0 \qquad \frac{du}{dx} = p$$

De même
$$A'\frac{d\varphi}{d\alpha} + B'\frac{d\varphi}{d\beta} + C' = 0 \qquad \frac{du}{dy} = q$$

en différentiant par rapport à y. $\qquad \frac{du}{dz} = r$

enfin, si l'on différentie par rapport à z :

$$A''\frac{d\varphi}{d\alpha} + B''\frac{d\varphi}{d\beta} + C'' = 0$$

entre ces trois équations, on pourra éliminer $\frac{d\varphi}{d\alpha}$ et $\frac{d\varphi}{d\beta}$, et l'on arrivera encore à une équation linéaire, de la forme

$$Pp + Qq + Rr = V$$

En Général, si l'on a une fonction φ portant sur n fonctions déterminées

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda) = 0$$

et s'il y a autant de variables indépendantes que de fonctions, on pourra éliminer φ en descendant seulement au 1er. ordre.

---

application. — Soit u une fonction homogène d'x, y et z. on pourra écrire

$$u = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

Je pose $\frac{y}{x} = \alpha$, $\frac{z}{x} = \beta$: alors

$$u = x^m \varphi(\alpha, \beta)$$

Eliminons φ. En différentiant

$$\frac{du}{dx} = m x^{m-1}\varphi - y x^{m-2}\frac{d\varphi}{d\alpha} - z x^{m-2}\frac{d\varphi}{d\beta}$$

$$\frac{du}{dy} = x^{m-1}\frac{d\varphi}{d\alpha}$$

$$\frac{du}{dz} = x^{m-1}\frac{d\varphi}{d\beta}$$

Eliminons φ, $\frac{d\varphi}{d\alpha}$, $\frac{d\varphi}{d\beta}$ en nous servant de ces 3 Equations et de $u = x^m \varphi(\alpha, \beta)$.

Il vient

$$x\frac{du}{dx} = mu - y\frac{du}{dy} - z\frac{du}{dz}$$

ou

$$x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz} = mu$$

C'est la propriété générale des fonctions homogènes.

Passons à l'Intégration des Equations aux Différentielles Partielles.

Soit d'abord

$$Pp + Qq + Rr = V \quad (1)$$

où entrent x, y, z et u, et où

$$p = \frac{du}{dx} \quad q = \frac{du}{dy} \quad r = \frac{du}{dz}$$

Représentons par

$$f(x, y, z, u) = 0 \quad (C)$$

l'Intégrale inconnue. — Différentions :

$$\begin{cases} \frac{df}{dx} + p\frac{df}{du} = 0 \\ \frac{df}{dy} + q\frac{df}{du} = 0 \\ \frac{df}{dz} + r\frac{df}{du} = 0 \end{cases}$$

Tirant delà p, q, r et reportant dans l'Eq. (1), on a

$$P\frac{df}{dx} + Q\frac{df}{dy} + R\frac{df}{dz} + V\frac{df}{du} = 0 \quad (2)$$

et cette Eq. (2) devra être vérifiée identiquement, au moins quand on aura tiré u de l'Eq. (C) pour le porter dans (2) : car, sans cela, il y aurait une relation entre les variables indépendantes x, y, z. Cette condition est donc évidemment nécessaire et suffisante.

Cela posé, reportons-nous aux équations simultanées. Lorsque l'on a

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{du}{V}$$

on sait que ces éq. comportent 3 intégrales

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z, u) = c \\ \psi(x, y, z, u) = c' \\ \pi(x, y, z, u) = c'' \end{cases}$$

où il n'y a qu'une seule variable indépendante, x par exemple, et chacune des fonctions φ, ψ, π. vérifie identiquement l'équation

$$P\frac{d\varphi}{dx} + Q\frac{d\varphi}{dy} + R\frac{d\varphi}{dz} + V = 0$$

De plus, je dis que toute fonction λ de φ, ψ et π jouit de la même propriété, c.à.d. qu'on a identiquement

$$P\frac{d\lambda}{dx} + Q\frac{d\lambda}{dy} + R\frac{d\lambda}{dz} + V = 0$$

En effet, on a

$$\begin{cases} P\frac{d\varphi}{dx} + Q\frac{d\varphi}{dy} + R\frac{d\varphi}{dz} + V = 0 \\ P\frac{d\psi}{dx} + Q\frac{d\psi}{dy} + R\frac{d\psi}{dz} + V = 0 \\ P\frac{d\pi}{dx} + Q\frac{d\pi}{dy} + R\frac{d\pi}{dz} + V = 0 \end{cases}$$

Multiplions ces éq. respectivement par $\frac{d\lambda}{d\varphi}$, $\frac{d\lambda}{d\psi}$ et $\frac{d\lambda}{d\pi}$, et ajoutons, on aura l'identité à démontrer.

Rapprochons ces résultats connus du problème qui nous occupe. Je vois que j'aurai une solution très-générale en intégrant les éq. simultanées écrites ci-dessus, et prenant

$$\lambda(\varphi, \psi, \pi) = 0$$

λ étant une fonction arbitraire des fonctions déterminées φ, ψ, π.

Est-ce là maintenant la solution la plus générale ?

Oui. — Car, soit

$$f(x, y, z, u) = 0 \qquad (2)$$

une intégrale de (1). — On a trouvé la solution

$$\lambda(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \qquad (3)$$

en posant pour plus de simplicité

$$\begin{cases} \alpha = \varphi(x, y, z, u) = 0 \\ \beta = \psi(x, y, z, u) = 0 \\ \gamma = \pi(x, y, z, u) = 0 \end{cases}$$

Je tire y, z et u en fonction de α, β, γ et x, et je reporte dans l'équation (2). Elle prend la forme

$$\chi(x, \alpha, \beta, \gamma) = 0$$

Je dis que x a disparu de lui-même. En effet, s'il restait, on pourrait écrire

$$x = \chi(\alpha, \beta, \gamma)$$

D'où, en différentiant,

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{d\chi}{dx} + p\,\dfrac{d\chi}{du} \\ 0 = \dfrac{d\chi}{dy} + q\,\dfrac{d\chi}{du} \\ 0 = \dfrac{d\chi}{dz} + r\,\dfrac{d\chi}{du} \end{cases}$$

Si je tire de là p, q, r et si je reporte leurs valeurs dans l'éq. proposée, elle devient

$$\frac{P}{\dfrac{d\chi}{du}} = 0$$

d'où

$$P = 0$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Cela provient de ce que x

est en évidence. Donc il a disparu. Donc

$$\lambda(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

est bien l'Intégrale la plus Générale.

Il y a une autre méthode pour intégrer les Equations aux Différentielles partielles.

Soit seulement le cas de deux variables

$$Pp + Qq = R$$

L'intégrale inconnue est une certaine Equation

$$f(x, y, z) = 0$$

Il est évident qu'on peut toujours la considérer comme résultant de l'Elimination de α entre deux Eq. de la forme

$$\begin{cases} y = f_1(x, \alpha) \\ z = f_2(x, \alpha) \end{cases}$$

l'une étant prise arbitrairement, et l'autre, convenablement choisie (ainsi : on peut prendre $\varphi(x, y, \alpha) = 0$ et $f(x, y, z) + \varphi(x, y, \alpha)\psi(x, z, \alpha)$ φ étant arbitraire : ce système donne f).

Cela posé, je vais remplacer p et q par les dérivées relatives à x. On aura, y et z étant des fonctions d'x et d'α,

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p + q \frac{dy}{dx}$$

d'où

$$p = \frac{dz}{dx} - q \frac{dy}{dx}$$

Je reporte dans l'Eq. Donnée. Elle devient

$$P \frac{dz}{dx} - R + q \left\{ Q - P \frac{dy}{dx} \right\} = 0$$

Je puis disposer de la fonction d'x que y représente

De manière que l'on ait

$$Q - R\frac{dy}{dz} = 0$$

et il reste

$$P\frac{dz}{dx} - R = 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

Cela fait deux Equations simultanées à intégrer. Il n'y entre ni α ni les dérivées relatives à α. Je les intègre donc comme des Equations différentielles ordinaires : seulement, les constantes devront être regardées comme des fonctions arbitraires de α. Nous aurons donc

$$\begin{cases} u = \pi(\alpha) \\ v = \pi_1(\alpha) \end{cases}$$

Il reste à éliminer α, et il est évident, π et π_1 étant des fonctions quelconques, que le résultat sera

$$u = \varphi(v)$$

φ étant encore une fonction arbitraire.

Cette méthode s'applique au cas de trois variables. Soit

$$Pp + Qq + Rr = V$$

Je puis poser

$$\begin{cases} y = f(x, \alpha, \beta) \\ z = f_1(x, \alpha, \beta) \\ u = f_2(x, \alpha, \beta) \end{cases}$$

f et f_1 étant arbitraires, et f_2 convenablement choisi pour que l'élimination de α et β donne l'intégrale.

on aura $\qquad \dfrac{du}{dx} = p + q\dfrac{dy}{dx} + r\dfrac{dz}{dx}$

d'où
$$p = \frac{du}{dx} - q\frac{dy}{dx} - r\frac{dz}{dx}.$$

Reportant dans l'Eq. donnée :

$$\left(P\frac{du}{dx} - V\right) + q\left(Q - P\frac{dy}{dx}\right) + r\left(R - P\frac{dz}{dx}\right) = 0$$

Je puis poser

$$\left.\begin{aligned} Q - P\frac{dy}{dx} &= 0 \\ R - P\frac{dz}{dx} &= 0 \\ P\frac{du}{dx} - V &= 0 \end{aligned}\right\}$$

d'où

ce qui donne

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{du}{V}$$

Intégrant :

$$\left.\begin{aligned} u &= \psi_{,}(\alpha, \beta) \\ v &= \psi_{,1}(\alpha, \beta) \\ w &= \psi_{,2}(\alpha, \beta) \end{aligned}\right\} \psi_{,}\ \psi_{,1}\ \psi_{,2} \text{ arbitraires}$$

d'où, en éliminant α et β,

$$w = \varphi(u, v)$$

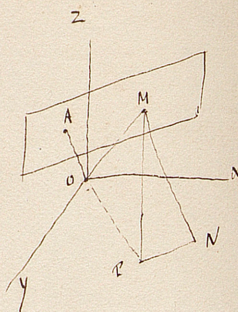
ou

$$\varphi(u, v, w) = 0$$

Il est clair qu'on raisonnerait de même pour un plus grand nombre de variables.

Exemple I. — Trouver une surface telle que, si de l'origine on abaisse une perp. OA sur le plan tangent en M, puis, qu'on mène la normale MN, et qu'on joigne OM, on ait constamment

$$OA \cdot MN = \overline{OM}^2$$



L'équation du plan tangent est

$$z'-z+p(x'-x)+q(y'-y)=0$$

donc

$$OA = \pm \frac{z-px-qy}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$\pm$ suivant que le plan coupe OZ au-dessus ou au-dessous du plan des xy. — De plus

$$MN = \frac{z}{\cos ZMN} = z\sqrt{1+p^2+q^2}$$

Donc l'équation est

$$(1) \qquad \pm z\left(z-px-qy\right) = x^2+y^2+z^2$$

1°. Prenons le signe +. alors l'Éq. se réduit à

$$2xp + 2yq = -(x^2+y^2)$$

ce qui conduit à intégrer le système

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{2y} = -\frac{dz}{x^2+y^2}$$

on en tire $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ d'où

$$y = cx$$

et ensuite : $\frac{dx}{x} = -\frac{2dz}{x^2+y^2} = -\frac{2dz}{x^2(1+c^2)}$, $xdx = -\frac{2dz}{1+c^2}$, d'où

$$(1+c^2)x^2+2z = c'$$

Résolvant ces deux équations par rapport aux constantes :

$$\frac{y}{x} = c \qquad x^2+y^2+z^2 = c'$$

L'intégrale générale est donc

$$\frac{y}{x} = \varphi\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

Elle représente une infinité de surfaces. — Si, dans le 1er membre, au lieu de $\frac{y}{x}$, on avait z, on aurait l'Éq. générale des surfaces de révolution. Or, joignons OP : le coefficient angulaire de OP est $\frac{y}{x}$. Soit θ l'angle POX, et $OM=\rho$. Il vient $\theta = \varphi(\rho)$. Cela montre que, si θ est fixe, ρ est constant. La section par le plan ZOP est donc un cercle. Donc : toute section faite par l'axe des Z est un cercle ayant son centre à l'origine.

2°. Prenons le signe —. alors l'Éq. (1) devient

$$pxz+qyz = x^2+y^2+2z^2$$

ce qui conduit à intégrer le système :

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{x^2+y^2+2z^2}$$

qui est moins simple, mais peut cependant encore s'intégrer : — on a d'abord

$$y = cx$$

Puis : $\frac{dx}{x} = \frac{2dz}{x^2+y^2+2z^2} = \frac{2dz}{x^2(1+c^2)+2z^2}$, équation homogène qu'on sait intégrer.

Exemple II. — Trouver une fonction telle que la somme des produits de ses dérivées partielles multipliées chacune par la variable correspondante, soit un multiple de la fonction.

Prenons 3 variables, pour fixer les idées. on doit avoir

$$x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz} = mu$$

Intégrons le système

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{mu}$$

d'où

$$\left.\begin{array}{l} y = cx \\ z = c_1 x \\ u = c_2 x^m \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} c = \frac{y}{x} \\ c_1 = \frac{z}{x} \\ c_2 = \frac{u}{x^m} \end{array}\right.$$

Donc

$$u = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

c'est l'Eq. Générale des fonctions homogènes. — on voit par là que la fonction homogène jouit seule de la propriété demandée.

Remarque. — Si l'on avait eu l'Eq.

$$x\frac{dy}{dx} + z\frac{dy}{dz} + mu\frac{dy}{du} = y$$

ou

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} + mu\frac{dz}{du} = z$$

on aurait eu les mêmes Eq. simultanées à intégrer, par suite, la même équation.

En Général : L'Equation

$$P\frac{du}{dx} + Q\frac{du}{dy} + R\frac{du}{dz} = V$$

donne la même intégrale générale que l'Eq.

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} + V\frac{dz}{du} = P$$

et les analogues qu'on pourrait former.

Exemple III. — Trouver une surface telle que la normale à cette surface rencontre toujours une droite fixe.

L'Éq. du plan tangent étant $z'-z = p(x'-x) + q(y'-y)$

les Éq. de la normale sont

$$\begin{cases} x'-x + p(z'-z) = 0 \\ y'-y + q(z'-z) = 0 \end{cases}$$

Cette normale doit toujours rencontrer une droite fixe que je prends passant par l'origine, et qui sera

$$\begin{cases} x' = az' \\ y' = bz' \end{cases}$$

Éliminons x', y', z' entre ces 4 équations. on trouve pour résultat

$$p(y-bz) + q(az-x) + ay - bx = 0$$

C'est l'équation du problème. — on en tire

$$\frac{dx}{y-bz} = \frac{dy}{az-x} = \frac{dz}{bx-ay} \qquad (1)$$

d'où

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{az-x}{y-bz} \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{bx-ay}{y-bz} \end{cases}$$

deux équations difficiles à intégrer.

Mais on peut avoir recours à un artifice. Prenons les 3 rapports (1). Multiplions les deux termes du 1er. par a, ceux du second par b, et ceux du 3e. par 1 ; puis ajoutons terme à terme :

$$\frac{a\,dx}{a(y-bz)} = \frac{b\,dy}{b(az-x)} = \frac{dz}{bx-ay} = \frac{a\,dx+b\,dy+dz}{0}$$

Donc il faut qu'on ait

$$a\,dx + b\,dy + dz = 0$$

d'où

$$ax + by + z = C$$

Maintenant, en multipliant au contraire par x, y et z, on aura

$$\frac{x\,dx}{x(y-bz)} = \frac{y\,dy}{y(az-x)} = \frac{z\,dz}{z(bx-ay)} = \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{0}$$

d'où

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$$

$$x^2+y^2+z^2 = C_1$$

Par suite, l'intégrale générale est

$$ax+by+z = \varphi(x^2+y^2+z^2)$$

C'est l'équation des surfaces de révolution.

Si la droite donnée est l'axe des z, il reste

$$z = \varphi(x^2+y^2+z^2)$$

ce qui revient à $x^2+y^2+z^2 = \varphi_1(z)$

ou $z^2 - \varphi_1(z) = -(x^2+y^2)$

ou enfin $z = \psi_1(x^2+y^2)$

Quant aux Equations aux différentielles partielles d'un degré plus élevé que le 1er. il n'y a pas de méthode générale pour les intégrer.

La plus remarquable, et la 1ère. qu'on ait intégrée, est celle des cordes vibrantes

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = a^2 \frac{d^2y}{dt^2}$$

Nous l'avons rencontrée (p. 347) en éliminant φ et ψ_1 dans l'Equation $y = \varphi(x+at) + \psi_1(x-at)$.

Cherchons à l'intégrer. _ Posons

$$\begin{cases} x+at = \alpha \\ x-at = \beta \end{cases}$$

l'Equation (1) deviendra

$$\frac{d^2y}{d\alpha d\beta} = 0$$

ou

$$\frac{d.\frac{dy}{d\beta}}{d\alpha} = 0$$

donc

$$\frac{dy}{d\beta} = \varphi(\beta)$$

$$dy = \varphi(\beta)d\beta$$

$$y = \int \varphi(\beta)d\beta + C$$

et C est une fonction arbitraire de α : donc

$$y = \Pi(\beta) + \Pi_1(\alpha)$$

c.a.d.

$$y = \Pi(x - at) + \Pi_1(x + at)$$

La difficulté est de déterminer les fonctions arbitraires dans chaque cas particulier.

Calcul des Variations.

Le Calcul des Variations a pris son origine dans les Questions de Maximum et Minimum considérées d'une manière générale.

On a vu, dans le calcul différentiel, que si l'on a

$$V = f(x, y, z)$$

et si l'on demande les valeurs de x, y et z qui rendent V maximum ou minimum, il suffit de les chercher parmi celles qui annulent $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$ et $\frac{dV}{dz}$.

Dans le calcul des variations, on considère une Intégrale définie:

$$\int_{x_0}^{x_1} V dx$$

où

$$V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \dots\right)$$

f étant une fonction connue, et y, z des fonctions inconnues de x, soit $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$. Il est évident que si je prends ainsi pour y et z deux fonctions, et si je remplace y et z par ces fonctions, V devient fonction de x, et, en intégrant, j'aurai un résultat déterminé. — Si je change φ et ψ, l'intégrale changera, et l'on peut se proposer de trouver ces deux fonctions de manière que l'Intégrale définie soit un maximum ou un minimum, c. à d. ait une valeur plus grande ou plus petite que celles qu'elle prend pour des valeurs infiniment voisines des fonctions.

On imagine pour un moment que l'on remplace y et z par des fonctions qui en diffèrent infiniment peu,

$y+\delta y$ et $z+\delta z$, δy et δz étant d'ailleurs des fonctions arbitraires de x. alors, l'intégrale devient

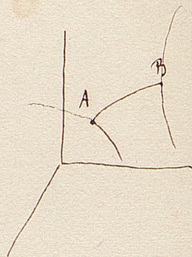
$$\int_{x_0}^{x_1} V' dx$$

et il faudra, s'il y a maximum ou minimum, que la différence

$$\int_{x_0}^{x_1} V dx - \int_{x_0}^{x_1} V' dx$$

ait un signe constant quels que soient δy et δz.

afin d'éclaircir cela, on peut recourir à la Géométrie. Chercher, pour y et z, deux fonctions $y=\varphi(x)$ et $z=\psi(x)$ telles que $\int_{x_0}^{x_1} V dx$ soit maximum ou minimum, cela revient à chercher une courbe AB, dont les équations soient $y=\varphi(x)$ et $z=\psi(x)$, telle que l'intégrale définie soit plus grande ou plus petite que si l'on prenait une autre courbe différente. Les extrémités, A et B, de la courbe, correspondantes aux abscisses x_0 et x_1, ne sont pas toujours données. ainsi, on peut demander de trouver la plus courte ligne qui aille, dans l'espace, d'une courbe à une autre, et ici, l'intégrale définie exprime la longueur de la ligne AB ; - de même encore, si l'on demande quelle est la courbe plane comprise entre deux points A et B, telle que, si elle tourne autour d'une ligne fixe, la surface de révolution soit maxima ou minima : l'intégrale représente l'aire de la surface, et les extrémités sont alors données.



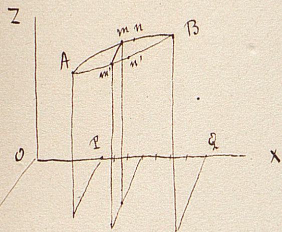
Revenons au 1er. Problème, où il s'agit de mener entre deux points A et B la ligne la plus courte.

alors ici, $V dx = ds$, ou

$$V dx = dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

ainsi l'intégrale dont on cherche le maximum est

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$



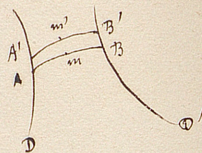
Soit AmB la courbe maximum; je considère une courbe voisine Am'B. L'intégrale définie représente une somme d'éléments obtenus en divisant $PQ = x_1 - x_0$ en parties égales, et menant par les points de division des plans perp. à OX, qui découpent AmB et Am'B en éléments correspondants tels que mn et m'n'. alors, pour passer de m à m', x reste le même, y et z devenant $y+\delta y$ et $z+\delta z$. Ce sont ces accroissements arbitraires δy et δz qu'on appelle des *variations*. alors, la nouvelle valeur de l'intégrale définie devient

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1+\left(\frac{d(y+\delta y)}{dx}\right)^2+\left(\frac{d(z+\delta z)}{dx}\right)^2}$$

et il faut que la 1ère intégrale soit toujours plus petite que la seconde.

Mais remarquons qu'il eût été permis ici et qu'il serait souvent nécessaire de supposer que x devint aussi $x+\delta x$. D'abord, on aurait pu le faire. En effet, je puis regarder toujours les deux intégrales comme composées d'un même nombre d'éléments, sans que ces éléments commencent aux mêmes abscisses. Ici, il n'y aurait aucun avantage, mais on le pourrait si on le jugeait convenable: seulement δx devrait être infiniment petit.

Je dis maintenant que c'est là la seule méthode générale. En effet, supposons que A et B ne soient plus fixes, mais assujettis à être sur deux courbes données. Il devient évident que si je décompose en éléments, la série de plans qui décomposent AmB n'atteindra pas toute la courbe voisine A'm'B'. Donc la méthode manquerait ici de généralité. Donc, si l'on veut comparer les deux intégrales et les deux courbes élément à élément, il faut attribuer des variations aux 3 coordonnées : de façon que si celles de A sont x_0, y_0, z_0, celles de A' par ex. seront $x_0+\delta x_0$, $y_0+\delta y_0$, $z_0+\delta z_0$. (Ici, il est évid^t. que δx_0 δy_0 et δz_0 ne sont pas indépendants, puisque A et A' sont sur la courbe D).



Maintenant, pour que les méthodes connues s'appliquent ici, on est convenu de regarder δx, δy et δz comme provenant de l'accroissement arbitraire donné à un certain paramètre idéal qu'on introduit dans le calcul.

Les équations d'une courbe peuvent se représenter ainsi

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = f_1(t) \\ z = f_2(t) \end{cases}$$

Je suppose que ce soient là les équations de la ligne cherchée (ou, en général, les relations entre x, y et z). Les équations de la courbe infiniment voisine pourront s'écrire

$$\begin{cases} x = f(t) + (m-a)\,\varphi(x,y,z) \\ y = f_1(t) + (m-a)\,\varphi_1(x,y,z) \\ z = f_2(t) + (m-a)\,\varphi_2(x,y,z) \end{cases}$$

qui donnent les précédentes pour $m=a$. – Comme d'ailleurs

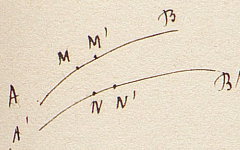
x y et z sont fonctions de t, ces trois équations peuvent s'écrire

$$\begin{cases} x = \varphi(t, m) \\ y = \psi(t, m) \\ z = \pi(t, m) \end{cases}$$

et ces Eq. peuvent représenter les équations de toute ligne, soit de la ligne minima, soit de la ligne voisine.

alors, il faut bien distinguer deux espèces d'accroissements infiniment petits dont x, y et z sont susceptibles.

Supposons que m ait reçu une certaine valeur. alors, on a une courbe AB déterminée. Pour passer du point M au point M' sur cette courbe, il faudra changer t en $t+dt$, d'où



$$\begin{cases} dx = \dfrac{d\varphi}{dt}\,dt \\ dy = \dfrac{d\psi}{dt}\,dt \\ dz = \dfrac{d\pi}{dt}\,dt \end{cases}$$

Supposons au contraire que, laissant t constant, m devienne $m+\delta m$. alors, la courbe prend une position infiniment voisine A'NB', de façon qu'alors x, y, z éprouvent des accroissements pour convenir au point correspondant N, dont je représente les coordonnées par $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, et

$$\begin{cases} \delta x = \dfrac{d\varphi}{dm}\,\delta m \\ \delta y = \dfrac{d\psi}{dm}\,\delta m \\ \delta z = \dfrac{d\pi}{dm}\,\delta m \end{cases}$$

Il résulte de là que si l'on a une fonction quelconque

$$V = f(x, y, z)$$

la variation s'obtiendra d'après les règles du Calcul différentiel:

$$\delta V = \frac{dV}{dx}\delta x + \frac{dV}{dy}\delta y + \frac{dV}{dz}\delta z$$

ou bien, en remplaçant δx, δy et δz par leurs valeurs,

$$\delta V = V' \delta m.$$

Ces fonctions φ, ψ et ϖ sont idéales, et seulement introduites pour permettre d'appliquer les méthodes du Calcul différentiel.

Théorème. — La différentielle de la variation est égale à la variation de la différentielle.

$$d\,\delta V = \delta\, dV.$$

Concevons x, y, z remplacés en fonction de t et de m. alors

$$V = \lambda(t, m)$$

et l'on a

$$\delta V = \frac{d\lambda}{dm}\delta m \qquad dV = \frac{d\lambda}{dt}dt$$

$$d\,\delta V = \frac{d\left(\frac{d\lambda}{dm}\right)}{dt}\delta m\, dt \qquad \delta\, dV = \frac{d\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)}{dm}\delta m\, dt$$

car $\frac{\delta V}{\delta m} = \frac{dV}{dm}$. ces deux résultats reviennent au même

c.q.f.d.

On généralise aisément : et l'on a

$$\delta\, d^n V = d^n\, \delta V$$

En effet, on aura

$$\delta\, d^n V = \delta\, d\,(d^{n-1} V)$$

$$= d\,\delta\,(d^{n-1} V)$$

de même

$$\delta\, d^{n-1} V = d\,\delta\, d^{n-2} V$$

Remplaçant

$$\delta\, d^n V = d^2\,\delta\, d^{n-2} V$$

et ainsi de suite. donc...

c.q.f.d.

Théorème. — La variation d'une intégrale est égale à l'intégrale de la variation.

Cherchons
$$\delta\int_{x_0}^{x_1} V\,dx$$

x_0 et x_1 pouvant aussi dépendre de m. — Je dis que
$$\delta\int_{x_0}^{x_1} V\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\delta . V\,dx$$

Introduisons les variables t et m. Soient t_0 et t_1 les valeurs de t correspondantes à x_0 et x_1. alors on a
$$\delta\int_{x_0}^{x_1} V\,dx = \delta\int_{t_0}^{t_1} V\frac{dx}{dt}\,dt$$

t_0 et t_1 sont indépendants de la variation de m. Donc l'on peut différentier sous le signe $\int$ et
$$\delta\int_{x_0}^{x_1} V\,dx = \int_{t_0}^{t_1}\delta\left(V\frac{dx}{dt}\right)dt$$

maintenant, on peut faire sortir dt du signe δ, puisque t est indépendant de m:
$$\delta\int_{x_0}^{x_1} V\,dx = \int_{t_0}^{t_1}\delta\,(V\,dx) = \int_{x_0}^{x_1}\delta V\,dx$$
c.q.f.d.

Autre démonstration. — on sait que, $v_0, v_1, \dots v_m$ étant les éléments de l'intégrale, on a à la limite, et m pouvant croître indéfiniment,
$$\int_{x_0}^{x_1} V\,dx = \lim\left(v_0+v_1+v_2+v_3+\dots+v_m\right)$$

Maintenant, quand on changera m en $m+\delta m$, la nouvelle intégrale sera, en la supposant décomposée en un même

nombre d'éléments :

$$\lim \left(v'_0 + v'_1 + v'_2 + \cdots + v'_m \right)$$

Pour avoir la variation, je retranche :

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx = \lim \left[(v'_0 - v_0) + (v'_1 - v_1) + \cdots + (v'_m - v_m) \right]$$

$$= \lim \sum \delta v_\circ = \int_{x_0}^{x_1} \delta (V dx)$$ c q f d.

Je suppose maintenant qu'on ait à rendre maximum ou minimum la fonction

$$\int_{x_0}^{x_1} V dx.$$

Je dis qu'une condition commune au maximum et au minimum est que

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx = 0$$

Je pose

$$\int_{x_0}^{x_1} V dx = U$$

et je suppose que y et z aient été trouvés de manière que U soit maximum. Si je change m en $m + \delta m$, l'intégrale U prend une autre valeur U', et j'aurai

$$U' - U = \frac{dU}{dm} \delta m + R$$

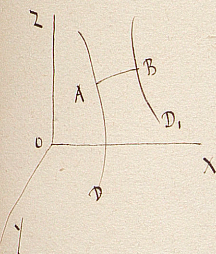
R étant infiniment petit par rapport au terme précédent. Cette différence doit conserver un signe invariable quel que soit δm, pourvu qu'il soit infiniment petit. Cela est impossible à moins que $\frac{dU}{dm} \delta m = 0$, ou

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx = 0$$

pour le maximum et le minimum. c q f d.

on distingue le maximum du minimum en ayant recours aux termes de seconde dimension. Mais c'est souvent inutile, quand on peut reconnaître à priori qu'il n'y a qu'un maximum ou qu'un minimum d'admissible.

Exemple. — Cherchons la ligne la plus courte entre deux courbes.



L'intégrale à rendre minima est

$$\int_{x_0}^{x_1} ds$$

Donc on doit avoir

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} ds = 0$$

ou

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta ds = 0$$

or

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

d'où

$$ds\, \delta ds = dx\, \delta dx + dy\, \delta dy + dz\, \delta dz$$

$$\delta ds = \frac{dx\, \delta dx + dy\, \delta dy + dz\, \delta dz}{ds}$$

Donc il faut qu'on ait

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dy}{ds} \delta dy + \frac{dz}{ds} \delta dz \right) = 0$$

Intégrons par parties. On a

$$\int \frac{dx}{ds} \delta dx = \int \frac{dx}{ds} d.\delta x = \frac{dx}{ds} \delta x - \int \delta x\, d\left(\frac{dx}{ds}\right)$$

Donc on devra avoir :

$$\left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z\right)_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1}\left(\delta x\, d.\frac{dx}{ds} + \delta y\, d\frac{dy}{ds} + \delta z\, d\frac{dz}{ds}\right) = 0$$

ou

$$\Big(A\Big)_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1}(B) = 0$$

Je dis qu'il faut qu'on ait séparément

$$\begin{cases} (A) = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

En effet, si $B \neq 0$, c.a.d.

$$\delta x\, d\frac{dx}{ds} + \delta y\, d\frac{dy}{ds} + \delta z\, d\frac{dz}{ds} \neq 0$$

je pourrai concevoir qu'on attribue à $\delta x, \delta y$ et δz une infinité de valeurs assujetties à la condition que $\delta x_0\ \delta y_0\ \delta z_0$ $\delta x_1\ \delta y_1\ \delta z_1$ restent fixes. alors $(A)_{x_0}^{x_1}$, qui ne dépend que des variations aux limites, et dont la valeur est

$$(A)_{x_0}^{x_1} = \left(\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \delta z_1\right) - \left(\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \delta x_0 + \dots\right)$$

restera fixe, tandis que $\int_{x_0}^{x_1}(B)$ variera. or c'est impossible. Donc:

$$(A) = 0$$
$$B = 0$$

c.a.d.

$$\delta x\, d\frac{dx}{ds} + \delta y\, d\frac{dy}{ds} + \delta z\, d\frac{dz}{ds} = 0 \qquad (1)$$

$$\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \delta z_1\right] - \left[\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \delta y_0 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 \delta z_0\right] = 0 \quad (2)$$

L'Eq. (1) est l'Equation Indéfinie, et (2) l'Equation aux Limites.

Supposons d'abord que la ligne minima ne soit assujettie à aucune condition dans son cours. alors, pour passer de m au point correspondant m', je puis attribuer à $\delta x, \delta y, \delta z$ des

valeurs arbitraires. Donc l'Eq. (1) est identique, et donne

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right)=0 \qquad d\left(\frac{dy}{ds}\right)=0 \qquad d\left(\frac{dz}{ds}\right)=0$$

Mais, comme deux Equations suffisent pour déterminer une droite, il faut que ces 3 conditions se réduisent à 2 : en effet, si je multiplie la 1re par $\frac{dx}{ds}$, la 2e par $\frac{dy}{ds}$, et la 3e par $\frac{dz}{ds}$, et si j'ajoute, j'aurai une identité.

En intégrant :

$$\frac{dx}{ds}=c \qquad \frac{dy}{ds}=c' \qquad \frac{dz}{ds}=c''$$

(et $c^2+c'^2+c''^2=1$). – Divisant membre à membre :

$$\frac{dy}{dx}=A \qquad \frac{dz}{dx}=B$$

et enfin

$$y=Ax+A' \qquad z=Bx+B'$$

Ce sont les Equations d'une ligne droite.

Comment pourra-t-on déterminer les 4 constantes ?

C'est l'Equation aux limites (2) qui va servir à cela.

Si l'on supposait d'abord que A et B fussent fixes, alors $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$, sont connus. alors l'Eq. (2) est identique et ne peut rien apprendre : et en effet, il suffit d'exprimer que la droite passe en A et en B pour déterminer les 4 constantes.

Mais supposons que ces extrémités soient assujetties à rester sur D et D_1. alors on donne les Equations

$$D\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x)\end{cases} \qquad D_1\begin{cases} y=\varphi_1(x) \\ z=\psi_1(x)\end{cases}$$

Puisque le point $(x_0+\delta x_0,\ y_0+\delta y_0,\ z_0+\delta z_0)$ appartient à D, on a

$$\begin{cases} \delta y_0 = \varphi'(x_0)\,\delta x_0 \\ \delta z_0 = \psi'(x_0)\,\delta x_0 \end{cases}$$

Donc deux de ces variations sont fonctions de la 3e. — D'ailleurs, comme il n'y a aucune relation entre les extrémités, l'éq. (2) se partage en deux, une pour chaque limite. Dans la première

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \delta y_0 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 . \delta z_0 = 0$$

si l'on remplace δy_0 et δz_0 par leurs valeurs, δx_0 est facteur commun, et il reste

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \varphi'(x_0) + \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 \psi'(x_0) = 0$$

ou, en divisant par $\frac{dx}{ds}$:

$$1 + A\,\varphi'(x_0) + B\,\psi'(x_0) = 0$$

de même

$$1 + A\,\varphi_1'(x_1) + B\,\psi_1'(x_1) = 0$$

Si j'en rapproche

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0) \\ z_0 = \psi(x_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1) \\ z_1 = \psi_1(x_1) \end{cases}$$

et enfin

$$\begin{cases} y_0 = Ax_0 + A' \\ z_0 = Bx_0 + B' \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = Ax_1 + A' \\ z_1 = Bx_1 + B' \end{cases}$$

on a 10 équations, et 10 inconnues $x_0\, y_0\, z_0\, x_1\, y_1\, z_1\, A\, A'\, B\, B'$.

Donc on peut déterminer ces quantités. –

Remarque. – L'équation aux limites manifeste une propriété remarquable de la ligne la plus courte : c'est qu'elle est normale aux deux courbes. – En effet, on a

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \delta y_0 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 \delta z_0 = 0$$

Je désigne par δs_0 l'élément AA' de la courbe D. alors

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \left(\frac{\delta x}{\delta s}\right)_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \left(\frac{\delta y}{\delta s}\right)_0 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 \left(\frac{\delta z}{\delta s}\right)_0 = 0$$

ce qui montre bien qu la propriété.

Supposons maintenant que l'extrémité A soit assujettie à rester sur une surface, dont l'équation soit

$$z = f(x, y)$$

D'où

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

et

$$\delta z_0 = \left(\frac{df}{dx}\right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{df}{dy}\right)_0 \delta y_0$$

Je substitue dans l'Eq. aux limites : il n'y restera plus que deux variations arbitraires : et elle deviendra

$$M \delta x_0 + N \delta y_0 = 0$$

d'où

$$\begin{cases} M = 0 \\ N = 0 \end{cases}$$

ce qui, avec

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

complète le nombre d'Eq. nécessaires.

Supposons encore que la ligne minima doive rester sur une surface quelconque. Alors, soit $m(x,y,z)$ un point de la ligne minima. Il est clair que, si je me donne δx et δy, δz sera déterminé. En effet, l'Eq. de la surface étant

$$f(x,y,z)=0$$

on en tire

$$(3) \qquad \frac{df}{dx}\,\delta x + \frac{df}{dy}\,\delta y + \frac{df}{dz}\,\delta z = 0$$

Si je reviens maintenant à l'Eq. indéfinie (1), je ne puis donc plus égaler à zéro les trois coefficients des variations. Mais l'Eq. (3) me donne

$$\delta z = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}}\,\delta x - \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}}\,\delta y$$

Si je reporte dans (1), elle prend la forme

$$M\,\delta x + N\,\delta y = 0$$

d'où

$$\begin{cases} M = 0 \\ N = 0 \end{cases}$$

c.à.d. en effectuant,

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{df}{dz}\, d\dfrac{dx}{ds} - \dfrac{df}{dx}\, d\dfrac{dz}{ds} = 0 & M=0 \\[2ex] \dfrac{df}{dz}\, d\dfrac{dy}{ds} - \dfrac{df}{dy}\, d\dfrac{dz}{ds} = 0 & N=0 \end{cases}$$

Ces deux Equations doivent rentrer l'une dans l'autre. Et en effet, si on les multiplie respectivement par $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ et qu'on ajoute, on a une identité.

Il restera à en intégrer une, ou une de leurs combinaisons, si c'est possible.

Ces Eq. (2) montrent que le plan osculateur en chaque point de la Ligne la plus courte est normal à la Surface sur laquelle elle est tracée. En effet, ces Eq. peuvent s'écrire

$$\frac{\frac{df}{dx}}{d.\frac{dx}{ds}} = \frac{\frac{df}{dy}}{d.\frac{dy}{ds}} = \frac{\frac{df}{dz}}{d\,\frac{dz}{ds}}$$

or soient λ, μ, ν les angles de la normale principale à la courbe avec les axes, et α, β, γ ceux de la normale à la Surface. on a

$$\left\{\begin{aligned} \cos\lambda &= \rho\,\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} \\ \cos\mu &= \rho\,\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds} \\ \cos\nu &= \rho\,\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds} \end{aligned}\right.$$

et

$$\left\{\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\frac{df}{dx}}{V} \\ \cos\beta &= \frac{\frac{df}{dy}}{V} \\ \cos\gamma &= \frac{\frac{df}{dz}}{V} \end{aligned}\right. \qquad V = \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}$$

Donc les Eq. précédentes sont

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\lambda} = \frac{\cos\beta}{\cos\mu} = \frac{\cos\gamma}{\cos\nu} = \frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}}{\sqrt{\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu}} = 1$$

donc

$$\alpha = \lambda \qquad \beta = \mu \qquad \gamma = \nu$$

ainsi la Ligne la plus courte est une Ligne Géodésique. — (976).

Pour une Sphère, dont l'Eq. est

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

on a

$$x\delta x+y\delta y+z\delta z=0$$

$$\delta z=-\frac{x}{z}\delta x-\frac{y}{z}\delta y$$

et les Equations (4) deviennent

$$\left\{\begin{array}{l} z\,d\frac{dx}{ds}-x\,d\frac{dz}{ds}=0 \\ z\,d\frac{dy}{ds}-y\,d\frac{dz}{ds}=0 \end{array}\right.$$

qui donnent les Intégrales

$$\left\{\begin{array}{l} z\frac{dx}{ds}-x\frac{dz}{ds}=C \\ z\frac{dy}{ds}-y\frac{dz}{ds}=C' \end{array}\right.$$

Divisant

$$z\,dx-x\,dz=k(z\,dy-y\,dz) \qquad k=\frac{C'}{C}$$

Eq. du 1er. ordre. divisant par z^2, elle donne

$$d\frac{x}{z}=k\,d\frac{y}{z}$$

d'où

$$\frac{x}{z}=k\frac{y}{z}+k'$$

$$x=ky+k'z$$

c'est l'Eq. d'un plan passant à l'origine : donc la ligne la plus courte est un arc de Grand cercle.

Sur un Cylindre : $x^2+y^2=R^2$

$$x\delta x+y\delta y=0$$

Puisque δz n'entre pas, il est évident que si l'on tire δy,

qu'on reporte dans (1), le coefficient de l'arbitraire δz reste tel qu'il était, et, comme il doit être nul :

$$d\,\frac{dz}{ds} = 0$$

$$\frac{dz}{ds} = C$$

Donc la ligne minima fait avec la Génératrice (parallèle à Oz) un angle constant : c'est un arc d'Hélice. — Si je continue : j'aurai

$$\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = C$$

$$\frac{dz^2}{c^2} = dx^2+dy^2+dz^2$$

$$\frac{dz^2(1-c^2)}{c^2} = dx^2+dy^2$$

or, $dy = -\frac{x}{y}\,dx$. Reportant et intégrant, on aura

$$x = R \sin kz$$

Cherchons à développer en général la condition

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} V\,dx = 0$$

Il faut donc chercher l'expression de la variation d'une fonction

$$V = f(x, y, y', y'' \ldots z, z', z'' \ldots)$$

on a

$$\delta.\int_{x_0}^{x_1} V\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \delta(V\,dx) = \int_{x_0}^{x_1} (\delta V.\,dx + V\,\delta\,dx)$$

J'intègre le 2e. terme par parties : on a

$$\int V\,\delta dx = \int V\, d\,\delta x = V\,\delta x - \int \delta x\, dV$$

substituant, on aura

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx = V_1\,\delta x_1 - V_0\,\delta x_0 + \int_{x_0}^{x_1} (\delta V . dx - \delta x . dV)$$

c'est le dernier qe terme qu'on cherche à développer. On voit qu'on a

$$dV = M dx + N dy + P dy' + Q dy'' + R dy''' + \ldots$$
$$+ N' dz + P' dz' + Q' dz'' + R' dz''' + \ldots$$

δV s'en déduira en changeant d en δ :

$$\delta V = M\,\delta x + N\,\delta y + P\,\delta y' + \ldots$$
$$+ N'\,\delta z + P'\,\delta z' + \ldots$$

Toutefois, cela n'est pas toujours vrai. S'il entrait dans V des termes relatifs aux limites, et contenant $x_0, y_0, y'_0, y''_0 \ldots$ alors la valeur ci-dessus de δV ne serait pas complète, et comprendrait des termes tels que

$$\frac{dV}{dx_0}\,\delta x_0 + \frac{dV}{dy_0}\,\delta y_0 + \text{etc.}$$

Je vais d'abord supposer que ces termes n'existent pas. alors on aura

$$\delta V . dx - \delta x\, dV = dx \begin{cases} N(\delta y - y'\delta x) + P(\delta y' - y''\delta x) \\ + Q(\delta y'' - y'''\delta x) + \text{etc.} \\ + N'(\delta z - z'\delta x) + \text{etc.} \end{cases}$$

Pour simplifier, on pose

$$\begin{cases} \delta y - y'\delta x = \omega \\ \delta z - z'\delta x = \omega' \end{cases}$$

et il vient alors

$$\delta V \cdot dx - \delta x \cdot dV = dx \left\{ \begin{array}{l} N\omega + P\dfrac{d\omega}{dx} + Q\dfrac{d^2\omega}{dx^2} + \cdots \\ + N'\omega' + P'\dfrac{d\omega'}{dx} + \text{etc.} \end{array} \right.$$

En effet, on avait $\delta y - y'\delta x = \omega$: d'où

$$\delta y' = \delta \frac{dy}{dx} = \frac{dx\,\delta dy - dy\,\delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta y - y' d\delta x}{dx} = \frac{d(\delta y - y'\delta x)}{dx} + y''\delta x$$

$$\delta y' = \frac{d\omega}{dx} + y''\delta x$$

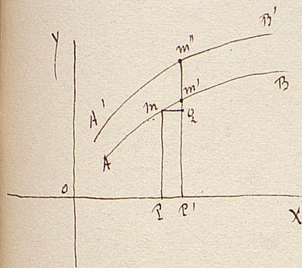
$$\delta y' - y''\delta x = \frac{d\omega}{dx} \qquad \text{c.q.f.d.}$$

ainsi, en définitive,

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx = \left(V\delta x\right)_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} dx \left\{ \begin{array}{l} N\omega + P\dfrac{d\omega}{dx} + Q\dfrac{d^2\omega}{dx^2} + \cdots \\ + N'\omega' + P'\dfrac{d\omega'}{dx} + \cdots \end{array} \right\}$$

avec :
$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = \delta y - y'\delta x \\ \omega' = \delta z - z'\delta x \end{array} \right.$$

Avant d'aller plus loin, ayons recours à la Géométrie. Supposons qu'il n'y ait que deux variables. Soit AB la courbe cherchée, m un de ses points, $PP' = \delta x$. on aura $m'Q = mQ\ \text{tg}\ m'mQ = y'\delta x$. Si l'on passe à la courbe voisine $A'B'$, δy est Qm''. Donc $\delta y = y'\delta x + m'm''$. Donc $m'm'' = \delta y - y'\delta x$. Donc $m'm''$ est ce que nous avons appelé ω. ainsi, la variable arbitraire ω signifie la différence entre les deux ordonnées des deux courbes qui répondent à une même abscisse.



S'il y a trois variables, c'est la même chose, seulement, on ne parle plus de la courbe elle-même, mais de ses projections.

Cherchons maintenant à simplifier l'expression précédente.

On aura

$$\int_{x_0}^{x_1} P \frac{d\omega}{dx} dx = \left(P\omega\right)_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \omega \frac{dP}{dx} dx$$

de même

$$\int_{x_0}^{x_1} Q \frac{d^2\omega}{dx^2} dx = \left(Q \frac{d\omega}{dx}\right)_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\omega}{dx} \frac{dQ}{dx} dx$$

$$= \left(Q \frac{d\omega}{dx} - \omega \frac{dQ}{dx}\right)_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \omega \frac{d^2Q}{dx^2} dx$$

De même

$$\int_{x_0}^{x_1} R \frac{d^3\omega}{dx^3} dx = \left(R \frac{d^2\omega}{dx^2} - \frac{dR}{dx}\frac{d\omega}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2}\omega\right)_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \omega \frac{d^3R}{dx^3} dx$$

et ainsi de suite.

ainsi

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx = A_1 - A_0 + \int_{x_0}^{x_1} (K\omega + K'\omega') dx$$

en posant

$$\begin{cases} A = V\delta x + \omega\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \cdots\right) + \frac{d\omega}{dx}\left(Q - \frac{dR}{dx} + \cdots\right) + \frac{d^2\omega}{dx^2}\left(R - \cdots\right) + \cdots \\ \qquad + \omega'\left(P' - \frac{dQ'}{dx} + \cdots\right) + \frac{d\omega'}{dx}\left(Q' - \cdots\right) + \frac{d^2\omega'}{dx^2}\left(R' - \cdots\right) + \cdots \\ K = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \cdots \\ K' = N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \cdots \end{cases}$$

Or, pour que cette Équation variation soit nulle, il faut qu'elle ait séparément

$$\begin{cases} A_1 - A_0 = 0 & \text{(Éq. aux Limites)} \\ K\omega + K'\omega' = 0 & \text{(Éq. Indéfinie)} \end{cases}$$

L'explication est la même que plus haut (p. 372). Car,

ω et ω' sont deux fonctions arbitraires : on peut donc, de x_0 à x_1, leur attribuer une infinité de valeurs. Cela posé, si $K\omega + K'\omega'$ n'était pas toujours nul, il y aurait entre x_0 et x, un certain intervalle, de a à b, dans lequel cet élément aurait un signe constant, toujours le signe $+$ par exemple. Maintenant, donnons à ω et ω' des valeurs croissantes : l'intégrale augmentera. D'ailleurs, ω et ω' restent les mêmes aux limites : donc le principe est démontré.

Si je remets pour ω et ω' leurs valeurs, l'Eq. indéfinie devient

$$K\delta y + K'\delta z - \delta x\left(Ky' + K'z'\right) = 0$$

Maintenant : ou bien la courbe n'est assujettie à aucune condition dans l'intervalle des limites : alors δx, δy et δz sont des accroissements tout-à-fait indépendants : donc l'Eq. indéfinie se partage en trois autres

$$\begin{cases} K = 0 \\ K' = 0 \\ Ky' + K'z' = 0 \end{cases}$$

Or la 3e. équation est comprise dans les deux autres : il n'y a en réalité que deux équations, qui déterminent la nature de la courbe. Elles sont

$$\begin{cases} N - \dfrac{dP}{dx} + \dfrac{d^2Q}{dx^2} - \cdots\cdots = 0 \\ N' - \dfrac{dP'}{dx} + \dfrac{d^2Q'}{dx^2} - \cdots\cdots = 0 \end{cases}$$

Ce sont deux équations simultanées à 3 variables y, z et x. De quel ordre seront-elles en général ? V est une fonction donnée, de la forme

$$V = f(x, y, y', y'', \ldots z, z', z'' \ldots)$$

Supposons que V soit de l'ordre n de différentiation : les éq. précédentes seront de l'ordre 2n. Car, supposons par ex. V du second ordre. V contient y, y', y'', z, z', z''. alors R n'existe pas, et dV s'arrête à $Q\,dy''$: et Q, en général peut contenir y''. or Q est soumis à deux différentiations : donc on aura y''' et y^{IV}. — C'est la même chose en général.

Toutefois, cela n'est pas toujours vrai. Si par exemple V était linéaire par rapport aux dérivées de l'ordre le plus élevé, alors l'ordre des éq. simultanées serait au plus $2n-1$.

Le nombre des constantes montera donc d'ordinaire à $2n$, et il s'agit de les déterminer.

Mais auparavant : — Si la ligne est assujettie à rester sur une surface donnée, dont l'équation est

$$F(x, y, z) = 0$$

comme le point $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ est sur la surface, il faudra que

$$\frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dz}\delta z = 0 \qquad (2)$$

Il n'y a alors que deux des variations d'arbitraires. on a

$$\begin{cases} \delta y = \omega + y'\delta x \\ \delta z = \omega' + z'\delta x. \end{cases}$$

Substituant, il vient

$$\left(\frac{dF}{dx} + y'\frac{dF}{dy} + z'\frac{dF}{dz}\right)\delta x + \frac{dF}{dy}\omega + \frac{dF}{dz}\omega' = 0$$

Mais le terme en δx est nul en vertu de l'éq. (2). Donc il reste

$$\frac{dF}{dy}\omega + \frac{dF}{dz}\omega' = 0$$

avec
$$K\omega + K'\omega' = 0.$$
Eliminons $\frac{\omega'}{\omega}$: il vient
$$K'\frac{dF}{dy} - K\frac{dF}{dz} = 0$$
Cette Eq. jointe à l'Eq. finie
$$F(x, y, z) = 0$$
résout le problème.

Ici, il n'y aura que $2n$ constantes, au lieu de $4n$, à déterminer.

C'est ici qu'on fait usage de l'Equation aux Limites : elle sert à déterminer les constantes.

Si comme cela arrive dans la plupart des cas, les deux limites sont indépendantes l'une de l'autre : alors cette Eq. aux Limites, $A_1 - A_0 = 0$, se partage en deux autres :
$$\begin{cases} A_1 = 0 \\ A_0 = 0 \end{cases}$$

En particulier, supposons V du 2^d. ordre, et attachons-nous spécialement à ce qui concerne la Limite x_1. Nous avons
$$A_1 = 0$$
Ici, cette Eq. devient
$$\left.\begin{aligned} V_1\delta x_1 + (\delta y_1 - y_1'\delta x_1)\left(P_1 - \frac{dQ_1}{dx}\right) + (\delta y_1' - y_1''\delta x_1)Q_1 \\ + (\delta z_1 - z_1'\delta x_1)\left(P_1' - \frac{dQ_1'}{dx}\right) + (\delta z_1' - z_1''\delta x_1)Q_1' \end{aligned}\right\} = 0$$
qui est de la forme
$$\left.\begin{aligned} a_1\delta x_1 + b_1\delta y_1 + c\,\delta z_1 \\ + b_1'\delta y_1' + c_1'\delta z_1' \end{aligned}\right\} = 0$$

les variations ne portant que sur les dérivées 1ères. En général, si v est de l'ordre n, les δ ne portent que sur les dérivées d'ordre $n-1$.

On aurait f une équation semblable pour l'autre limite.

D'ailleurs, on a à intégrer le système

$$\begin{cases} N - \dfrac{dP}{dx} + \dfrac{d^2Q}{dx^2} = 0 \\ N' - \dfrac{dP'}{dx} + \dfrac{d^2Q'}{dx^2} = 0 \end{cases}$$

ce qui amènera 8 constantes arbitraires, $c, c_2 \dots c_8$. Cela fait 8 inconnues, qui sont les seules, si les limites sont fixes, ce que je suppose. — Soient

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

les intégrales, qui contiennent les constantes. J'aurai

$$\left.\begin{aligned} &\begin{cases} \varphi_1 = 0 \\ \psi_1 = 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} \varphi_0 = 0 \\ \psi_0 = 0 \end{cases} \end{aligned}\right| \quad 4 \text{ Equations}$$

$(\varphi_1 = \varphi(x, y, z_1), \text{ etc.})$ — Maintenant, B est fixe. Donc $\delta y_1 = \delta z_1 = \delta x_1 = 0$; mais $\delta y'_1$ et $\delta z'_1$ sont complètement arbitraires. Donc

$$\text{de même} \quad \left.\begin{aligned} &\begin{cases} b'_1 = 0 \\ c'_1 = 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} b'_0 = 0 \\ c'_0 = 0 \end{cases} \end{aligned}\right| \quad 4 \text{ Eq.}$$

en tout 8 Eq. pour 8 inconnues.

Si, B étant donné, A doit rester sur une courbe D_0 dont les Eq. sont

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \lambda(x) \\ z = \mu(x) \end{array} \right.$$

alors il y a 3 inconnues de plus, x_0 y_0 z_0. or il y a aussi 3 Eq. de plus : car d'abord

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 = \lambda(x_0) \\ z_0 = \mu(x_0) \end{array} \right| \quad 2 \text{ Eq.}$$

Puis, il faut que le point $(x_0 + \delta x_0, \, y_0 + \delta y_0, \, z_0 + \delta z_0)$ soit sur D_0. donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta y_0 = \lambda'(x_0)\, \delta x_0 \\ \delta z_0 = \mu'(x_0)\, \delta x_0 \end{array} \right.$$

Je porte ces valeurs dans l'Eq. aux limites, qui est de la forme

$$\left. \begin{array}{l} a_0 \delta x_0 + b_0 \delta y_0 + c_0 \delta z_0 \\ \quad + b'_0 \delta y'_0 + c'_0 \delta z'_0 \end{array} \right\} = 0$$

et j'ai

$$\left\{ a_0 + b_0 \lambda'(x_0) + c_0 \mu'(x_0) \right\} \delta x_0 = 0 \qquad 1 \text{ Eq.}$$

J'ai donc bien 3 Eq. de plus.

De même si B n'est pas fixe.

Si la courbe doit rester sur une surface

$$F(x, y, z) = 0$$

on n'a plus que $2n$ constantes. alors, il y a $2n-2$ Eq. de condition, et le problème n'est possible qu'avec certaines restric-

-tions. — Prenons par exemple V du 2^d. ordre. alors, l'Eq. à intégrer est du 2e. ordre, et il y a 4 constantes, c_1 c_2 c_3 c_4. Supposons les limites fixes. Il y aura 6 Eq. pour déterminer les 4 constantes. En effet, soit

$$y = \varphi(x)$$

l'intégrale, avec 4 constantes, après qu'on a éliminé z au moyen de l'Eq. $F = 0$. — on doit avoir

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 = \varphi(x_0) \\ y_1 = \varphi(x_1) \end{array} \right| \; 2 \text{ Eq.}$$

L'Eq. aux limites étant d'ailleurs

$$\left. \begin{array}{l} a_0 \delta x_0 + b_0 \delta y_0 + c_0 \delta z_0 \\ + b'_0 \delta y'_0 + c'_0 \delta z'_0 \end{array} \right\} = 0$$

la 1ère. ligne est nulle d'elle-même. Dans la 2e., $\delta y'_0$ et $\delta z'_0$ ne sont pas indépendants ; car l'Eq. différentielle de la surface est

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

$$\frac{dz}{dx} = p + q\,\frac{dy}{dx}$$

ou

$$z' = p + q\,y'$$

donc, en A, on aura

$$z'_0 = p_0 + q_0\,y'_0$$

c'est une relation entre z' et y'. — Différentiant :

$$\delta z'_0 = q_0\,\delta y'_0$$

Reportant dans la 2e ligne de l'Eq. aux limites :

$$(b'_0 + c'_0\,q_0)\,\delta y'_0 = 0$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} b'_0 + c'_0 q_0 = 0 \\ \text{avec} \quad z'_0 = p_0 + q_0 y'_0 = 0 \end{array} \right| \; 2 \text{ Eq.}$$

De même il y en aurait encore 2 pour la limite x_1. Donc il y a deux équations de condition.

Si V est du 1er ordre, il n'y a plus d'équation de condition.

On pourrait se donner certaines autres conditions. Par exemple : toutes les courbes qui aboutissent au point B doivent former avec l'axe des z un angle invariable. alors, soit γ cet angle. on a en général

$$\cos\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{z'_1}{\sqrt{1+y'^2_1+z'^2_1}}$$

telle est la condition, $\cos\gamma$ étant constant. Prenons la variation :

$$0 = \delta z'_1 \sqrt{1+y'^2_1+z'^2_1} - z'_1 \frac{y'_1\delta y'_1 + z'_1 \delta z'_1}{\sqrt{1+y'^2_1+z'^2_1}} = 0$$

d'où l'on tire aisément

$$\delta z'_1 = \frac{z'_1 y'_1}{1+y'^2_1}\,\delta y'_1$$

Si l'on reporte dans l'éq. aux limites, qui, on le sait, se réduit à

$$b'_1 \delta y'_1 + c'_1 \delta z'_1 = 0$$

et si l'on égale à zéro le coefficient de $\delta y'_1$, on a

$$b'_1 + \frac{c'_1 z'_1 y'_1}{1+y'^2_1} = 0$$

qui, avec

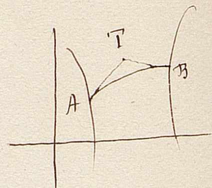
$$\cos\gamma = \frac{z'_1}{\sqrt{1+y'^2_1+z'^2_1}}$$

donne bien encore 2 Eq. de condition.

Donc le nombre des Équations se maintient toujours.

Enfin, il peut se faire qu'il n'y ait pas indépendance entre les variations de A et de B : alors l'Éq. aux limites ne se partage pas en deux.

Par exemple : La courbe cherchée étant plane, les éléments extrêmes doivent former entre eux un angle constant.



ATB = const. , $\operatorname{tg} ATB = K$;

$$K = \frac{y'_1 - y'_0}{1 + y'_1 y'_0}$$

Donc les variations aux limites ne sont plus indépendantes, et l'on a

$$\delta y'_1 = M \delta y'_0$$

Donc je ne pourrai plus poser

$$\begin{cases} A_1 = 0 \\ A_0 = 0 \end{cases}$$

De même : Si la distance rectiligne AB, dans l'espace, devait être constante : on aurait

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 = l^2$$

Différentiant, on substituerait dans l'Éq.

$$A_1 - A_0 = 0$$

et l'on égalerait à zéro les coefficients des variations restantes. on aurait justement le nombre d'Éq. nécessaires.

Remarque. — Supposons que tout se passe dans un plan. — on a à intégrer l'Éq. indéfinie

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \cdots = 0$$

Si V est du 2e. ordre, il reste

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0$$

Il y a un cas où cette Eq. est immédiatement intégrable. C'est celui où $V = f(x, y', y'')$, et ne contient pas y. alors, N manque, puisque $N = \frac{dV}{dy}$. Il reste

$$-\frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0$$

$$P - \frac{dQ}{dx} = C$$

et l'on a ainsi immédiatement une intégrale première.

Il y a un second cas: c'est celui où V ne contient pas la variable indépendante x.

alors en effet, $M = 0$, et l'on a

$$\left.\begin{aligned} dV &= N dy + P dy' + Q dy'' \\ 0 &= N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} \end{aligned}\right\}$$

avec

Eliminons N:

$$dV = P dy' + \frac{dP}{dx} dy + Q dy'' - \frac{d^2Q}{dx^2} dy$$

$$= d\left(Py'\right) + d\left(Qy'' - \frac{dQ}{dx} y'\right)$$

D'où

$$V = C' + Py' + Qy'' - \frac{dQ}{dx} y'$$

et il est évident que l'ordre est abaissé.

Compléments.

Compléments de Calcul Différentiel.

Sur les Maxima et Minima.

Problème. — Trouver, entre deux points lumineux, le point le moins éclairé.

Soient a et b les intensités, d la distance des deux points, et x la distance du point cherché au 1er point lumineux. La quantité de lumière reçue par ce point est en général

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(d-x)^2}$$

Cette fonction a-t-elle un minimum ? oui, car si nous faisons croître x de 0 à d, elle passera d'une valeur infinie à une valeur également infinie : il y a donc dans l'intervalle au moins un minimum. — Pour le trouver, je prends la dérivée et je l'égale à zéro :

$$\frac{b}{(d-x)^3} - \frac{a}{x^3} = 0$$

d'où

$$\frac{d-x}{x} = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

$$x = \frac{d}{1+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}$$

Pour reconnaître si c'est là réellement un minimum, je prends la dérivée seconde :

$$\frac{3a}{x^4} + \frac{3b}{(d-x)^4} = \frac{3}{(d-x)^4}\left[b + \frac{a(d-x)^4}{x^4}\right]$$

on voit de suite, sous l'une ou l'autre de ces formes, que pour la valeur de x trouvée, $f''(x)$ est >0. C'est donc un minimum.

Rem. — On trouvera de la même manière le point le moins échauffé sur la droite qui joint deux foyers calorifiques ; la loi physique est en effet la même.

Problème. — Soit la courbe

$$y = b + (x-a)^{\frac{2}{3}}$$

Voir d'autres exemples, p. 594.

La dérivée première est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}(x-a)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(x-a)}}$$

Si j'égalais cette dérivée à zéro, je ne trouverais que des points à l'infini qui ne répondent pas à la question. Mais, en l'égalant à l'infini, j'obtiens la valeur $x=a$, pour laquelle la fonction proposée est maxima ou minima. Je ne puis ici, pour distinguer lequel des deux états elle acquiert, faire usage

des dérivées suivantes : car la théorie exige que ces dérivées soient finies. Je considère donc les signes de $\frac{dy}{dx}$ pour des valeurs de x voisines de a.

$$\text{Pour } x < a \;,\; \frac{dy}{dx} < 0 \quad ; \quad \text{pour } x > a \;,\; \frac{dy}{dx} > 0$$

La dérivée est croissante. La valeur $x = a$ fait donc acquérir un minimum à la fonction proposée. C'est ce que l'on voit d'ailleurs sur cette fonction elle-même. Car, en y remplaçant x par $a \pm h$, on a

$$y = b + \sqrt[3]{h^2}$$

par conséquent la différence $f(a+h) - f(a)$ est constamment positive quel que soit le signe de h : car elle est $\sqrt[3]{h^2}$.

Ce minimum trouvé en égalant à l'infini la dérivée caractérise un point de rebroussement, la tangente étant parallèle à l'axe des y.

Problème. — Trouver si la fonction x^x a un maximum ou un minimum.

Je substitue à cette fonction son logarithme :

$$x\, lx$$

et j'en prends la dérivée

$$lx + 1$$

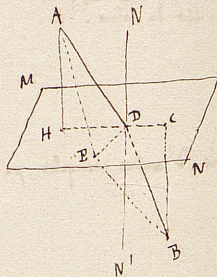
En l'égalant à zéro, j'obtiens

$$lx = -1$$

$$x = \frac{1}{e}$$

Cette valeur donne un minimum, car elle rend positive la dérivée seconde $\frac{1}{x}$.

Problème. Deux points, A et B sont situés dans deux milieux séparés par une surface plane MN. Un mobile se meut dans le 1er milieu avec une vitesse u, dans le 2e avec une vitesse v. Quel chemin doit-il suivre pour aller de A en B dans le temps le plus court possible ?



Ce chemin se compose évidemment de deux lignes droites, et ces lignes doivent être contenues dans le plan des perp. abaissées de A et B sur MN. Car supposons que ce chemin du plus prompt parcours perce le plan en un point E hors de HC : si j'abaisse ED perp. sur HC, il est clair, d'après le théorème des 3 perp. que j'aurai $AE > AD$ et $BE > BD$: donc le chemin ADB sera parcouru en moins de temps que le chemin AEB. — Il est d'ailleurs évident que le point D doit tomber entre H et C.

Cela posé, soit $AH = a$, $HC = d$, $BC = b$, $HD = x$. Nous aurons pour le temps employé par le mobile pour aller de A en D et de D en A

$$\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{u} + \frac{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}{v}$$

et il faut chercher le minimum de cette quantité : pour cela, je pose

$$\frac{x}{u\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{x-d}{v\sqrt{(d-x)^2+b^2}} = 0$$

au lieu de résoudre cette éq. par rapport à x, je la mets sous la forme

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\, v = \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}\, u$$

puis, j'observe que $\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sin HAD = \sin ADN$, et que $\frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}} = \sin CBD = \sin BDN'$.

Donc

$$\frac{u}{v} = \frac{\sin ADN}{\sin BDN'}$$

Le rapport des vitesses est, dans le cas du minimum, égal à l'indice de réfraction du 2.

Maxima et Minima des fonctions Implicites.

Soit

$$f(x, y, z, u)$$

une fonction de 4 variables liées entre elles par les 3 éq.

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z, u) = 0 & (1) \\ \varphi_1(x, y, z, u) = 0 & (2) \\ \varphi_2(x, y, z, u) = 0 & (3) \end{cases}$$

Par suite, nous pouvons considérer x comme la seule variable, et les 3 autres comme des fonctions de celle-ci, et par suite, $f(x, y, z, u)$ sera fonction de la seule variable x. Par suite, les conditions du maximum ou du minimum de la fonction sont celles que l'on connaît. — Je prendrai donc la dérivée totale par rapport à x de la fonction, et je l'égalerai à zéro. J'aurai

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = 0 \qquad (4)$$



Mais cette Equation contient des quantités inconnues $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx}$ qui peuvent se déterminer en différentiant les Equations (1), (2), (3).

$$\begin{cases} \frac{dq}{dx} + \frac{dq}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dq}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{dq}{du}\frac{du}{dx} = 0 & (5) \\ \frac{dq_1}{dx} + \cdots\cdots = 0 & (6) \\ \frac{dq_2}{dx} + \cdots = 0 & (7) \end{cases}$$

en éliminant les 3 quantités en question, j'aurai

$$\psi(x, y, z, u) = 0$$

qui, ajoutée aux Eq. (1), (2) et (3) détermine les valeurs de x, y, z, u répondant aux maxima et minima. En substituant ces valeurs dans f, on obtient les maxima et minima de cette fonction.

Pour déterminer si ces valeurs sont réellement des maxima ou des minima, il faudrait examiner les changements de signe que subit l'Eq. (4) quand x, y, z, u atteignent et dépassent les valeurs en question. Mais cette marche sera en général très-pénible, et l'on peut y substituer l'emploi de la dérivée seconde totale.

On sait trouver cette dérivée seconde. Elle contiendra les quantités $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2u}{dx^2}$, qu'on déterminera en différentiant par rapport à x les Eq. (5), (6) et (7). Par l'élimination de ces 3 quantités, on obtiendra une Eq. fonction de $x, y, z, u, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx}$, qui, jointe aux Equations (5), (6) et (7) déterminera, par les signes qu'elle prendra, si les valeurs trouvées pour x, y, z, u. correspon-

dont réellement à des maxima ou à des minima.

Problème. Trouver la distance minima d'un point donné à une courbe d'éq:

$$f(x,y)=0$$

Soient a et b les coordonnées du point m, x et y celles du point d'intersection de la droite minima avec la courbe.

$$(x-a)^2+(y-b)^2$$

est la fonction dont il faut trouver le minimum. Je différentie par rapport à x, en considérant y comme fonction d'x, et j'égale à zéro. J'obtiens:

$$x-a+(y-b)\frac{dy}{dx}=0$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x-a}{y-b}$$

ce qui montre que la droite est normale à la courbe.

Supposons que la courbe soit un cercle:

$$x^2+y^2=R^2$$

alors $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$, et la relation devient

$$\frac{x}{y}=\frac{x-a}{y-b}$$

$$y=\frac{b}{a}x$$

et cette éq. jointe à celle du cercle, détermine des valeurs de x et y correspondantes au maximum et au minimum.

Si l'on prenait le point m sur l'axe des x, on trouverait

$$mP^2=y^2+(x-a)^2=R^2-2ax+a^2$$

dont la dérivée est

$$-2a$$

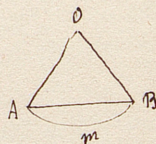
quantité constante. Le calcul semble donc ici ne pas indiquer le minimum ni le maximum. Et en effet, dans le cas actuel, le calcul ne peut nous donner le même résultat que dans le cas général. La ligne MP est bien minima relativement à toute autre ligne MP' menée du point m à un point de la circonférence. Mais la définition analytique du minimum exige que la valeur de x pour laquelle il a lieu soit comprise entre des valeurs immédiatement inférieures et des valeurs immédiatement supérieures: ici au contraire, au delà de la valeur d'x qui donne le minimum, il n'y a plus que des valeurs imaginaires.

on voit donc bien pourquoi le calcul ne donne pas immédiatement le résultat. Je dis immédiatement : car la solution est contenue dans le résultat obtenu. Nous avons trouvé pour la dérivée $-2a$, quantité négative quel que soit x : donc la fonction, ou la longueur mP, décroît depuis que la plus petite valeur a été donnée à x, jusqu'à ce qu'il atteigne sa plus grande, en sorte qu'elle est maxima pour $x=-R$ et minima pour $x=R$.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que des fonctions ayant un nombre limité de maxima et de minima. Mais il en est, comme le Cosinus et le Sinus, qui passent une infinité de fois par les mêmes valeurs, et présentent une infinité de maxima et de minima.

Le problème suivant en donne un exemple.

Problème. — Par un point A passe un arc AmB de longueur constante, mais décrit avec un rayon variable. On demande le maximum et le minimum du segment compris entre cet arc et sa corde.



Le triangle AOB étant égal, en désignant le rayon variable par x, à $\frac{x^2}{2}\sin\frac{l}{x}$, et le secteur circulaire AmBO à $\frac{1}{2}lx$, on a

$$\text{Segm}^t.\ AmB = \frac{1}{2}lx - \frac{x^2}{2}\sin\frac{l}{x} = y$$

D'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}l - x\sin\frac{l}{x} + \frac{x^2}{2}\cos\frac{l}{x}\times\frac{l}{x^2} = 0$$

$$\cos\frac{l}{2x}\left\{l\cos\frac{l}{2x} - 2x\sin\frac{l}{2x}\right\} = 0$$

Cette éq. peut être satisfaite de plusieurs manières :

1°. en posant $\cos\frac{l}{2x}=0$, d'où $\frac{l}{2x}=(2K+1)\frac{\pi}{2}$, et

$$x = \frac{l}{(2K+1)\pi}$$

Nous trouvons ainsi pour x une infinité de valeurs. Correspondent-elles à des maxima ou à des minima ? Pour en décider, je prends la dérivée seconde, qui pour la valeur particulière que nous venons de trouver pour x, sera évidemment

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2l}{4x^2}\left(-\sin\frac{l}{2x}\right)\left(-2x\sin\frac{l}{2x}\right) = -\frac{l}{x}\sin^2\frac{l}{2x}$$

quantité négative lorsqu'on y remplacera x par sa valeur $\frac{l}{(2k+1)\pi}$. Par conséquent les valeurs correspondantes de y sont des maxima. D'où forme le tableau

$$x = \frac{l}{\pi} \quad \frac{l}{3\pi} \quad \frac{l}{5\pi} \quad \frac{l}{7\pi} \quad \cdots \quad \frac{l}{(2k+1)\pi}$$

$$y = \frac{l^2}{2\pi} \quad \frac{l^2}{6\pi} \quad \frac{l^2}{10\pi} \quad \frac{l^2}{14\pi} \quad \cdots \quad \frac{l^2}{2(2k+1)\pi}$$

Parmi ces valeurs de y, la plus grande s'obtient évidemment en faisant $k=0$, et alors $\frac{l}{x} = \pi$, c.à.d. quel'arc qui renferme le segment est une demi-circonférence.

Mais une fonction continue comme celle dont nous nous occupons ne peut passer par une infinité de maxima sans se avoir autant de minima compris dans l'intervalle. Et en effet, on peut satisfaire à l'équation obtenue

2°. en posant:

$$l \cos \frac{l}{2x} - 2x \sin \frac{l}{2x} = 0$$

d'où

$$\operatorname{tg} \frac{l}{2x} = \frac{l}{2x}$$

on voit facilement que la 1ère. valeur qui satisfait à cette équation est $\frac{l}{2x} = 0$, que la seconde est comprise entre π et $\frac{3}{2}\pi$, la 3e entre 2π et $\frac{5}{2}\pi$, la 4e. entre 3π et $\frac{7}{2}\pi$, etc. Desorte que les valeurs correspondantes de x sont d'abord ∞, puis comprises entre $\frac{l}{\pi}$ et $\frac{l}{3\pi}$, etc. c'est-à-dire entre les valeurs de x qui donnent les maxima.

Maintenant, ces valeurs correspondent bien à des minima. Car, si nous prenons la dérivée seconde de la fonction y, on trouve que l'hypothèse $\operatorname{tg} \frac{l}{2x} = \frac{l}{2x}$ la réduit à

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{l}{x} \sin^2 \frac{l}{2x}$$

quantité essentiellement positive.

Problème analogue pour les Calottes Sphériques.

Formes singulières des Fonctions.

1°. Forme $\frac{0}{0}$.

La règle donnée exige que toutes les dérivées, jusqu'à celles qui ne s'annulent pas simultanément, soient finies, de façon que le développement de Taylor soit possible.

S'il n'en était pas ainsi, on chercherait à développer les deux fonctions $F(a+h)$ et $f(a+h)$ suivant les puissances croissantes, mais quelconques d'ailleurs, de h. Soit

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{Ah^{\alpha} + Bh^{\beta} + \dots}{A'h^{\alpha'} + B'h^{\beta'} + \dots}$$

alors : si $\alpha = \alpha'$, la limite est $\frac{A}{A'}$.

" $\alpha > \alpha'$ " 0

" $\alpha < \alpha'$ " ∞

Il peut arriver que le symbole $\frac{0}{0}$ se présente pour une valeur infinie de la variable. Supposons qu'il en soit ainsi. Nous poserons $x = \frac{1}{y}$, et alors, par les mêmes raisonnements, nous aurons

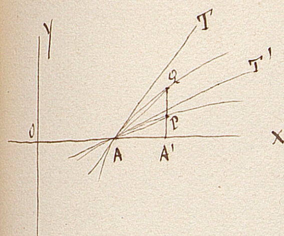
$$\text{Lim.}\frac{F(\frac{1}{y})}{f(\frac{1}{y})} = \text{Lim.}\frac{F'(\frac{1}{y})}{f'(\frac{1}{y})}$$

ce qui revient à

$$\text{Lim}\frac{F(x)}{f(x)} = \text{Lim.}\frac{F'(x)}{f'(x)}$$

De sorte que la même règle s'applique encore.

On peut, par des considérations géométriques, se rendre compte de la manière dont le rapport des fonctions devient à la limite celui de leurs dérivées. — Soit $y = F(x)$ une courbe qui rencontre l'axe des abscisses au point A. $(OA = a)$: et $y = f(x)$ une 2de courbe rencontrant OX au même point. Je considère l'ordonnée relative à l'abscisse $OA' = a + h$.



$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{A'Q}{A'P} = \frac{Tg.\,QAA'}{Tg.\,PAA'}$$

Si A' tend vers A, les sécantes AQ et AP tendent à devenir les tangentes en A, et, à la limite,

$$\frac{F(a)}{f(a)} = \frac{Tg.\,TAx}{Tg.\,T'Ax} = \frac{F'(a)}{f'(a)}$$

2°. Forme $\frac{\infty}{\infty}$.

Mr. Cauchy démontre de la manière suivante que l'on peut appliquer immédiatement aux fonctions dont le rapport se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$ les règles données pour le cas de $\frac{0}{0}$.

Distinguons 3 cas : la limite est finie et différente de zéro, elle est nulle, elle est infinie.

1°. $\lim.\ \frac{F(x)}{f(x)} = A$. on a

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{F(x)}}$$

et alors, nous pourrons appliquer la règle : la limite de ce rapport est égale à la limite du rapport des dérivées. Donc on aura

$$\text{Lim.}\frac{F(x)}{f(x)} = \text{Lim.}\frac{f'(x).F(x)^2}{F'(x).f(x)^2} = \text{Lim}\left[\frac{F(x)}{f(x)}\right]^2\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

ou bien

$$A = A^2\,\text{Lim.}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

d'où

$$A = \text{Lim.}\frac{F'(x)}{f'(x)}$$

2°. $\text{Lim.}\frac{F(x)}{f(x)} = 0$. Je dis qu'alors la limite du rapport des dérivées est également zéro. Je considère avec M^r. Liouville la fonction

$$\frac{F(x)}{f(x)} + g = \frac{F(x) + g\,f(x)}{f(x)}$$

laquelle aura pour limite g. Puisque sa limite est finie et différente de zéro, je retombe dans le 1er. cas. J'écris donc

$$\text{Lim.}\frac{F(x)+g\,f(x)}{f(x)} = \text{Lim.}\frac{F'(x)+g\,f'(x)}{f'(x)}$$

c. a d.

$$g = \text{Lim.}\frac{F'(x)}{f'(x)} + g$$

d'où

$$\text{Lim.}\frac{F'(x)}{f'(x)} = 0 \qquad \text{c.q.f.d.}$$

3°. Soit enfin $\text{Lim.}\frac{F(x)}{f(x)} = \infty$. Nous aurons

$$\text{Lim.}\frac{f(x)}{F(x)} = 0$$

donc

$$\text{Lim.}\frac{f'(x)}{F'(x)} = 0$$

d'où

$$\text{Lim}\,\frac{F'(x)}{f'(x)} = \infty$$

La limite du rapport des fonctions est donc encore la même que celle du rapport de leurs dérivées.

Exemple du cas $\frac{0}{0}$.

Soit à trouver la vraie valeur de

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{1-\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$$

pour $x=1$. Nous ne pouvons appliquer ici la règle qui a été donnée : car elle exige que chacune des fonctions soit continue dans le voisinage de la valeur particulière attribuée à x : et ici, pour toute valeur de x moindre que 1, le numérateur est imaginaire.

Je remplace x par $1+h$.

$$\frac{(h^2+2h)^{\frac{1}{2}}}{1+h^{\frac{1}{2}}-(1+h)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{h}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{1+h^{\frac{1}{2}}-(1+h)^{\frac{1}{2}}}$$

Je développe par la formule de Newton, et j'obtiens

$$\frac{2^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{h}{4}-\frac{1}{1.2.4}\cdot\frac{h^2}{4}+\cdots\right]}{1-\left[1+\frac{h}{2}-\frac{1}{1.2.4}h^2+\cdots\right]+h^{\frac{1}{2}}}$$

Supprimant les termes qui se détruisent, et le facteur commun $h^{\frac{1}{2}}$, j'ai

$$\frac{2^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{h}{4}-\frac{1}{1.2.4}\cdot\frac{h^2}{4}+\cdots\right]}{1-\left[\frac{h^{\frac{1}{2}}}{2}-\frac{1}{1.2.4}\cdot h^{\frac{3}{2}}+\cdots\right]}$$

La limite est donc de $2^{\frac{1}{2}}$ ou $\sqrt{2}$.

Au lieu de développer, on pourrait multiplier haut et bas par $1+\sqrt{h}+\sqrt{1+h}$, supprimer $\sqrt{h}$ facteur commun, et faire $h=0$.

Tangentes aux Courbes.

On sait que l'Eq. Générale de la tangente à une courbe plane

$$f(x, y) = 0$$

est

$$Y \frac{df}{dy} + X \frac{df}{dx} = y \frac{df}{dy} + x \frac{df}{dx}$$

Si l'Eq. était

$$f(x, y) = C$$

C étant un paramètre variable, de sorte qu'elle représentât une infinité de courbes de même espèce, l'Eq. de la tangente ne serait pas modifiée. Mais si, dans cette Eq. de la tangente, nous considérons X et Y comme les coordonnées α et β d'un point particulier du plan; et x, y comme les courantes, les deux Eq.

$$\beta \frac{df}{dy} + \alpha \frac{df}{dx} = y \frac{df}{dy} + x \frac{df}{dx}$$

$$f(x, y) = C$$

déterminent les coordonnées x et y du point de contact pour chaque valeur particulière attribuée à C. Si donc nous laissons C indéterminé, la 1re. Eq. qui en est indépendante, représentera le lieu des points de contact des tangentes menées du point $\alpha\beta$ à toutes les courbes $f(x, y) = C$.

On démontre aisément que cette Eq. est au plus du degré $m-1$, m étant celui de f. En effet, le 1er. membre est évidemment du degré $m-1$ au plus. Quant au second, on remarque qu'il est formé des termes de l'Eq. proposée multipliés respectivement par leur degré : de sorte que si l'Eq. contient le terme $Ax^p y^q$, le 2e. membre renferme $(p+q) A x^p y^q$. Nous pouvons donc l'écrire

$$mq + (m-1) q_1 + (m-2) q_2 + \dots$$

en représentant par q, q_1, q_2... l'ensemble des termes de degré m, $m-1$, $m-2$... ; ou bien

$$m(q+q_1+q_2+\ldots) - q_1 - 2q_2 - 3q_3 - \ldots$$

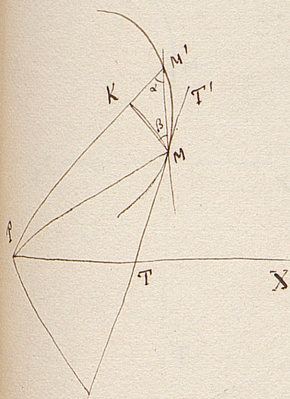
Mais le multiplicateur de m est nul de lui-même puisque c'est le 1er membre de l'Eq. de la Courbe. Donc ce second membre est au plus aussi du degré $m-1$.

Si donc la courbe proposée est du second degré, celle du lieu des points de contact est une droite : propriété remarquable des courbes du second degré données par l'Eq. $f(x,y)=c$.

Tangentes en Coordonnées polaires.

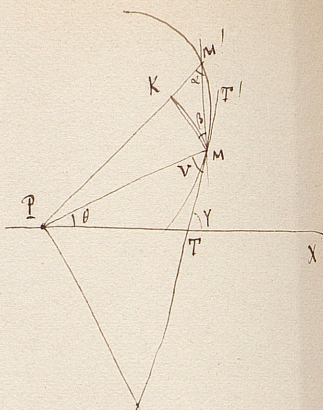
La tangente se définit au moyen de l'angle qu'elle fait avec le rayon vecteur mené au point de contact. On prend celui des deux angles qui est compris entre le rayon vecteur et la partie de la tangente qui est dirigée en sens contraire du mouvement du rayon vecteur, celui-ci se mouvant de manière à augmenter l'angle qu'il fait avec l'axe polaire.

Cherchons la valeur générale de cet angle.



La tangente au point M est la limite des positions successives de la sécante MM' lorsque le point M' se rapproche indéfiniment de M : et l'angle cherché PMT est la limite de l'angle PM'M. Soit $PM'M = \alpha$, et $KMM' = \beta$, le point K étant déterminé par un arc de cercle décrit du pôle P avec PM pour rayon. Dans le triangle PMM', on a

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{KM}{KM'} = \frac{\frac{KM}{\text{arc}\,KM}}{\frac{KM'}{\text{arc}\,KM}}.$$



Cherchons les limites. $\sin\alpha$ devient $\sin V$; β devient l'angle de la tangente MT' avec la tangente au cercle de rayon PM, c.à.d. le complément de V. Donc $\text{Lim.} \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \text{Tg}\, V$. Pour le second membre, le numérateur devient 1; le dénominateur exprime le rapport de l'accroissement de l'arc de cercle du rayon vecteur à l'accroissement de l'arc de cercle décrit par le rayon vecteur, et, si nous désignons par k l'accroissement du rayon, h celui de l'angle, $h\,r$ sera celui de l'arc, et par suite la limite du rapport en question sera $\text{Lim.} \frac{k}{rh}$. Donc enfin

$$\text{Tg}\, V = \frac{1}{\text{Lim}\, \frac{k}{r.h}}$$

et

$$\text{Tg}\, V = r.\ \text{Lim} \frac{h}{k}. = r \frac{d\theta}{dr}$$

Cette démonstration semble exiger que le rayon vecteur aille en croissant. Mais il serait facile de l'adapter au cas contraire.

Voici d'ailleurs un mode de démonstration moins élémentaire il est vrai, mais à l'abri de toute objection.

Le triangle PMT nous donne

$$V = \gamma - \theta$$

d'où

$$\text{Tg} V = \frac{\text{Tg}\gamma - \text{Tg}\theta}{1 + \text{Tg}\gamma\, \text{Tg}\theta}$$

Si nous considérions la courbe comme rapportée à deux axes rectangulaires passant en P et dont l'un coïnciderait avec PX, nous aurions

$$\text{Tg}\,\gamma = \frac{dy}{dx} \qquad \text{Tg}\,\theta = \frac{y}{x}$$

Donc

$$\operatorname{Tg} V = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y\,dy}{x\,dx}} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x\,dx + y\,dy}$$

valeur que je vais transformer au moyen des Relations

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \end{cases}$$

on en tire

$$x^2 + y^2 = r^2$$

d'où

$$x\,dx + y\,dy = r\,dr$$

d'ailleurs on a

$$\frac{y}{x} = \operatorname{Tg}\theta$$

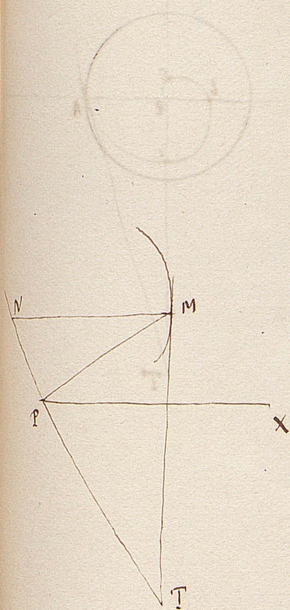
d'où

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{r^2 \cos^2\theta} = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$x\,dy - y\,dx = r^2\,d\theta$$

et substituant,

$$\operatorname{Tg} V = r\,\frac{d\theta}{dr}$$



On appelle Sous-Tangente la longueur interceptée sur une droite perp. au rayon vecteur entre le pôle et le point de rencontre avec la Tangente. Elle a pour valeur

$$S_t = TP = r^2\,\frac{d\theta}{dr}$$

on trouve aussi pour la Sous-Normale

$$S_n = NP = r \cot V = \frac{dr}{d\theta}$$

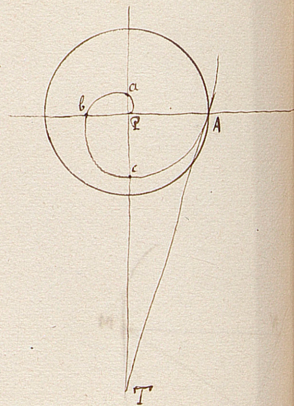
Spirale d'Archimède.

$$r = a\theta$$

Cette courbe peut être considérée comme le lieu des positions successives d'un mobile s'avançant d'un mouvement uniforme sur le rayon vecteur, en même temps que celui-ci, d'abord couché sur l'axe polaire, s'élève et tourne uniformément autour du pôle. On voit qu'en effet dans un tel mouvement, la distance du mobile à l'origine, ou la longueur du rayon vecteur, est constamment proportionnelle à l'angle que fait celui-ci avec l'axe polaire.

Supposons qu'après une révolution entière, le mobile soit arrivé en A, et décrivons la circonférence qui a pour rayon PA = l. On aura

$$a.2\pi = l \quad \text{d'où} \quad a = \frac{l}{2\pi}$$



et l'Eq. de la courbe peut s'écrire

$$r = \frac{l}{2\pi}\theta$$

alors, posant successivement $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$, j'ai $r = 0, \frac{l}{4}, \frac{l}{2}, \frac{3l}{4}$; ce qui me donne les points P, a, b, c, de la courbe. — Au-delà de la valeur $\theta = 2\pi$, il suffit, pour obtenir chaque tour de spire, d'augmenter de l les rayons vecteurs du précédent. En effet, si l'on prend deux rayons vecteurs correspondants à des valeurs de θ qui diffèrent d'une circonférence, on a

$$r = \frac{l}{2\pi}\left(2m\pi + \alpha\right)$$

$$r' = \frac{l}{2\pi}\left(2(m+1)\pi + \alpha\right)$$

d'où

$$r' - r = l$$

Cherchons la tangente en un point quelconque.

$$\mathrm{Tg}\, V = r\frac{d\theta}{dr} = \frac{l}{2\pi}\theta \times \frac{2\pi}{l} = \theta$$

Nous aurons pour la sous-normale

$$S_n = \frac{l}{2\pi} = \text{Const.}$$

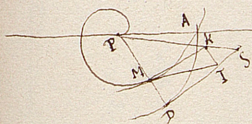
et pour la sous-tangente

$$S_t = \frac{l}{2\pi}\theta^2$$

Pour le point A, où $\theta = 2\pi$, $S_t = 2l\pi$ = la circonférence PA ; TP = cette circonférence.

Quand $\theta = 2m\pi$, $S_t = m$ Circ. ml, c.a.d. m fois la circonfér. qui a pour rayon le rayon vecteur actuel.

La construction suivante donne la tangente en un point quelconque. Soit M le point de la spirale, PA = l. Je décris la circf. de rayon l, et au point D où elle est rencontrée par le rayon vecteur du point M, je mène DS tangente au cercle. Je prends DS = arc DA ; je joins PS, je mène MK parallèle à DS et KI à PD. La droite MI est la tangente. Montrons qu'en effet l'angle DMI a pour tangente l'angle θ du rayon vecteur avec l'axe polaire. On a



$$\mathrm{Tg}\, DMI = \frac{DI}{DM} = \frac{MK}{DM}$$

$$MK : DS :: PM : PD$$

$$MK : (2\pi-\theta)l :: \frac{l}{2\pi}\theta : l$$

$$MK = \frac{2\pi-\theta}{2\pi}\theta l$$

D'autre part

$$DM = PD - PM = l - \frac{l}{2\pi}\theta = \frac{2\pi-\theta}{2\pi}l$$

Donc

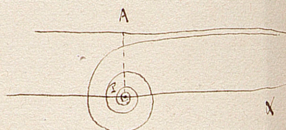
$$\mathrm{Tg}\, DMI = \theta$$

c.q.f.d.

Spirale Hyperbolique.

$$r\theta = a.$$

on voit facilement que, pour des valeurs infiniment petites de θ, r est infini; et qu'il est infiniment petit pour des valeurs infiniment grandes de θ. L'asymptote de la branche infinie est parallèle à l'axe polaire.



on trouve

$$\operatorname{tg} V = r\left(-\frac{\theta}{r}\right) = -\frac{a}{r}$$

et

$$S_t = -a$$

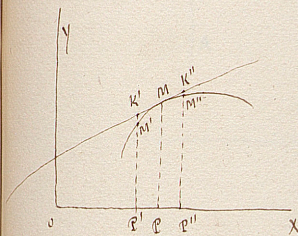
$$S_n = -a\frac{d\theta}{\theta^2} = -\frac{a}{\theta^2} = -\frac{r^2}{a}$$

La sous-tangente est constante et égale à la distance AP, de sorte que le lieu de ses extrémités est le cercle décrit du pôle avec AP pour rayon. on voit qu'elle est négative, parce qu'elle rencontre la partie de la tangente qui fait avec le rayon vecteur l'angle $180° - V$.

Concavité et Convexité des Courbes.

Un arc de Courbe est dit Convexe par rapport à une droite menée dans son plan, quand cet arc est en-dehors de l'angle aigu formé par la droite et la Tangente en un des points de l'arc.

Si l'arc est compris dans cet angle, il est Concave par rapport à la droite.



Quand une courbe est concave en un point M vers l'axe des x, les ordonnées de deux points très-voisins M' et M'' doivent être moindres, en grandeur absolue, que les ordonnées de la Tangente au point M, correspondantes aux mêmes abscisses OP', OP''.
Soit $f(x,y)=0$ l'Eq. de la Courbe, et désignons par h la quantité $PP''=PP'$ dont s'accroît l'abscisse. Nous aurons pour l'abscisse du point P'', $x+h$, et pour ordonnée correspondante

$$P''M'' = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(x+\theta h)}$$

et pour l'ordonnée de la Tangente

$$P''K'' = y + \frac{dy}{dx}h$$

D'où

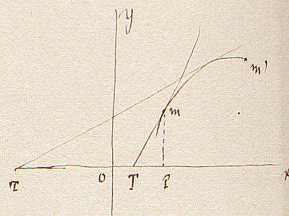
$$P''M'' - P''K'' = \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(x+\theta h)}$$

Cette différence doit être négative : il faut donc que $\frac{d^2y}{dx^2}$ soit lui-même négatif, ou de signe contraire à y. — Si l'arc de courbe était situé au-dessous de l'axe des x, on arriverait à ce résultat que la dérivée seconde doit être positive. —

Donc, en Général :

Une courbe est concave vers l'axe des x pour tout point tel que l'ordonnée de ce point et la dérivée seconde sont de signes contraires.

On arrive à ce même résultat en supposant que la tangente, d'abord tangente en m, roule sur la courbe pour venir la toucher au point m'. Dans ce mouvement, le point T s'éloigne du pied P de l'ordonnée Pm : donc l'angle mTP diminue. Ainsi la fonction $\frac{dy}{dx}$ va en diminuant, ce qui exige que $\frac{d^2y}{dx^2}$ soit négatif lorsque l'arc de courbe considéré est au-dessus de l'axe des x.



On verrait de la même manière que

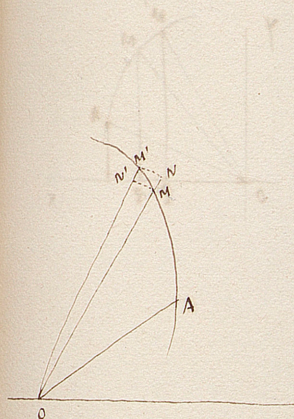
Une courbe est convexe vers l'axe des x pour tout point tel que l'ordonnée de ce point et la dérivée seconde sont de même signe.

Si la dérivée seconde était nulle, on verrait que, pour qu'il y eût concavité, il faut que la 1re dérivée qui ne s'annule pas soit d'ordre pair, et de signe contraire à y ; — de même signe que y dans le cas de l'arc convexe.

Différentielle de l'aire en coordonnées polaires.

L'équation de la courbe est de la forme

$$r = f(\theta)$$



et alors, l'aire ou la surface comprise entre deux rayons vecteurs OA et OM est une fonction de θ que je représenterai par $z = \varphi(\theta)$. Soit OMM' un accroissement quelconque Δz donné à z, que je supposerai assez petit pour que, de M en M', le rayon vecteur soit constamment croissant ou décroissant. – Nous avons les inégalités

$$OM'N > \Delta z > OMN'$$

MN' et M'N étant des arcs de cercle décrits du pôle avec r et $r + \Delta r$ pour rayons. – Cette inégalité devient

$$\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2 \Delta\theta > \Delta z > \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$$

$$\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2 > \frac{\Delta z}{\Delta\theta} > \frac{1}{2} r^2$$

et par conséquent, à la limite,

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2$$

$$dz = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Ce résultat est celui auquel on arriverait en confondant l'aire OMM' avec le secteur circulaire OMN'; car ce secteur est égal à $\frac{1}{2} r$ multiplié par la longueur de l'arc MN', ou bien par le produit du rayon par l'angle N'OM mesuré dans le cercle de rayon 1. Or, à la limite, cet arc sera $r d\theta$,

en confondant $d\theta$ avec l'accroissement total de θ, dont il ne diffère que d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même.

On aurait pu arriver à la différentielle de l'aire en coordonnées polaires en déduisant son expression de celle de l'aire dans le cas des axes rectangulaires.

On aura en effet:

$$\Delta z = OM'P' + PMM'P' - OMP$$

$$\Delta z = \frac{1}{2}(x+\Delta x)(y+\Delta y) - y\,\Delta x - \frac{xy}{2}$$

$$dz = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$$

or $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta$, $\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \frac{x\,dy - y\,dx}{r^2\cos^2\theta} = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$. D'où

$x\,dy - y\,dx = r^2 d\theta$ et

$$dz = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

c.q.f.d.

Y, M', M, A, O, P', P, X

Différentielle de l'arc.

L'aire d'une courbe plane est une quantité qui se conçoit très-nettement : il n'en est pas de même de la longueur d'un arc de courbe. — Une ligne droite étant toute composée d'éléments identiques, il n'y a rien que de très-simple et très-immédiat dans l'idée d'une droite double, triple d'une autre. Les arcs d'un cercle pouvent aussi se comparer immédiatement les uns avec les autres, puisque la courbure est la même pour tous les éléments. Mais un arc de courbe quelconque est composé d'éléments différents, non superposables : deux arcs ne peuvent donc plus être comparés l'un à l'autre immédiatement.

On considère alors l'arc de courbe comme la limite vers laquelle tend un contour polygonal inscrit ou circonscrit, lorsque le nombre de ses côtés croît indéfiniment. D'après cette considération, la longueur du contour polygonal étant une quantité toujours facile à concevoir, puisqu'elle est composée d'éléments rectilignes, l'esprit arrive à concevoir celle de l'arc de courbe, et à pouvoir la comparer à la ligne droite.

Il est d'abord nécessaire de démontrer que ce contour polygonal a une limite, et une limite indépendante du mode de division.

Or on a

$$\text{Corde } MN = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

Si le point N se rapproche de M, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend vers sa limite $\frac{dy}{dx}$, et l'on peut donc écrire

$$\text{Corde } MN = \Delta x \left\{ \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \varepsilon \right\}$$

ε tendant vers zéro en même temps que Δx. – Le périmètre de la ligne polygonale sera donc

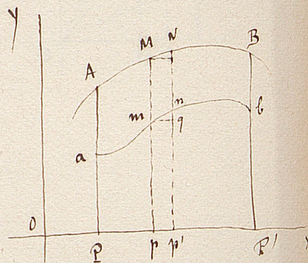
$$\Sigma\, \varepsilon\, \Delta x + \Sigma\, \Delta x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Je dis que cette quantité a une limite fixe. – D'abord, $\Sigma\, \varepsilon\, \Delta x$ a pour limite zéro. Car : Soit α la plus grande valeur que puisse prendre ε. on a

$$\Sigma\, \varepsilon\, \Delta x < \alpha\, \Sigma\, \Delta x$$

Mais $\Sigma\, \Delta x$ est une quantité finie PP', α tend vers zéro : donc

$$\text{Lim } \Sigma\, \varepsilon\, \Delta x = 0$$



Maintenant, considérons $\Sigma\, \Delta x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. La quantité que multiplie Δx est une fonction continue de x que je puis prendre pour l'ordonnée d'une courbe

$$Y = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Je construis cette courbe, et soient $a..m, n..b$ les points où elle rencontre les ordonnées de la première. L'élément de surface curviligne $mnpp'$ ne diffère de l'élément rectangulaire $mqpp'$ que d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même. Si donc je fais la somme des quantités telles que $Y\Delta x$, la limite de cette somme ne différera pas de la limite de la somme des éléments de surface curviligne, et par suite :

$$\text{Lim. } \Sigma\, Y \Delta x = \text{aire } abPP' = \lambda$$

ainsi λ est la limite fixe et finie de $\Sigma\, Y\, \Delta x$, ou de

$\sum \Delta x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, et par suite, du contour polygonal.

Nous avons donc, en désignant par s la limite du contour polygonal, ou la longueur de l'arc de courbe AMB,

$$s = \lambda$$

Donc

$$\frac{ds}{dx} = \frac{d\lambda}{dx} = y = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

d'après ce que nous savons sur la différentielle de l'aire.

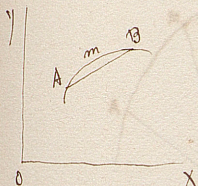
De là :

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$$

telle est l'expression de la différentielle de l'arc.

On conclut facilement de là que la limite du rapport d'un arc quelconque à sa corde est l'unité.

En effet, soit un arc fini AMB que je représente par Δs : on aura évidemment



$$\frac{\Delta s}{AB} = \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}$$

et puisque, quand Δx s'annule, $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ devient $\frac{ds}{dx}$, c.à.d. $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, aussi bien que le dénominateur, on a

$$\text{Lim.}\ \frac{\text{arc } AmB}{AB} = 1$$

Ainsi, désormais, dans tout théorème où l'on aura à considérer la limite d'un rapport dont un des termes sera un arc de courbe, on pourra remplacer cet arc par sa corde : car la différence de l'arc à sa corde est infiniment petit par rapport à chacune de ces quantités.

On peut même démontrer que cet infiniment petit est du 3e. ordre relativement à l'arc ou à la corde. Comme on

verra plus loin qu'un arc de courbe infiniment petit peut être confondu avec un arc de cercle, je démontre la proposition pour ce dernier.

Soit AMB l'arc de cercle dont O est le centre. Soit AMB = 2x, AB = 2a, OA = R. Nous avons

$$BP = OB \sin POB$$

$$a = R \sin \frac{x}{R}$$

et en développant

$$a = R\left(\frac{x}{R} - \frac{x^3}{1.2.3}\cdot\frac{1}{R^3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{R^5} - \cdots\right)$$

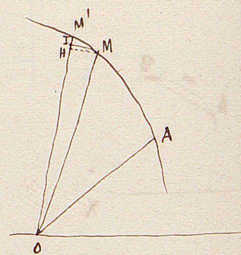
D'où

$$x - a = \frac{x^3}{1.2.3}\,\frac{1}{R^3} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{R^5} + \cdots$$

Donc $x-a$ est du 3e. ordre.

En Coordonnées Polaires :

Soit $MM' = \Delta s$. on pourra écrire



$$\Delta s = \frac{\text{arc } MM'}{MM'}\cdot MM' = \frac{\text{arc } MM'}{MM'}\sqrt{\overline{MH}^2 + \overline{M'H}^2} = \frac{\text{arc } MM'}{MM'}\sqrt{r^2\sin^2\Delta\theta + \left\{\Delta r + 2r\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta\theta\right\}^2}$$

D'où

$$\frac{\Delta s}{\Delta\theta} = \frac{\text{arc } MM'}{MM'}\sqrt{r^2\frac{\sin^2\Delta\theta}{\Delta\theta^2} + \left(\frac{\Delta r}{\Delta\theta} + r\frac{\sin^2\frac{1}{2}\Delta\theta}{\frac{1}{2}\Delta\theta}\right)^2}$$

et, à la limite,

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$$

Cette formule peut se trouver directement sur la figure par la considération des infiniment petits. En menant les cordes MM' et MI, nous formons un triangle qui nous donne

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MI}^2 + \overline{M'I}^2 + 2.MI.M'I.\cos MIM'$$

Le 1er. membre et les deux premiers termes du second sont des infiniment petits du second ordre par rapport à l'arc MM'; le 3e. terme est au contraire du 3e. ordre: car Cos. MIM' tend indéfiniment vers zéro. Nous pourrons donc le négliger. Si maintenant nous écrivons

$$\frac{\overline{MM'}^2}{\overline{MI}^2} = \frac{\overline{M'I}^2}{\overline{MI}^2} + 1$$

Comme nous pouvons remplacer ces rapports par ceux de quantités qui en diffèrent infiniment peu par rapport à elles, MM' se confondra avec l'arc, M'I avec l'accroissement du rayon vecteur, et MI avec l'arc dont il est la corde. Nous aurons donc à la limite

$$\frac{ds^2}{r^2 d\theta^2} = \frac{dr^2}{r^2 d\theta^2} + 1$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

Sur le Contact des Courbes.

On appelle Courbes Paraboliques celles qui sont comprises dans l'Équation

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + \dots + kx^m$$

Proposons-nous de déterminer les m paramètres de cette Équation de manière que la courbe qu'elle représente soit osculatrice à une courbe donnée $y = f(x)$ en un point x' y'.

Au lieu d'employer la méthode donnée pour le cercle, et qui entraînerait dans des calculs beaucoup trop longs, on pose

$$ax + bx^2 + cx^3 + \dots + kx^m = \varphi(x)$$

de sorte que

$$y = \varphi(x)$$

est l'Éq. de la courbe parabolique. — Si l'on y remplace x par $x' + x - x'$, il vient

$$y = \varphi(x') + \varphi'(x')\cdot(x - x') + \frac{\varphi''(x')}{1.2}(x - x')^2 + \dots + \frac{\varphi^m(x')}{1.2\dots m}(x - x')^m$$

car ceci est le développement d'un Polynôme algébrique.

Pour que cette courbe soit osculatrice à la courbe donnée, il faut qu'elle ait un contact de l'ordre $m-1$, m étant le nombre des paramètres. Donc :

$$\varphi(x') = f(x')$$

$$\varphi'(x') = f'(x')$$

$$\varphi''(x') = f''(x')$$

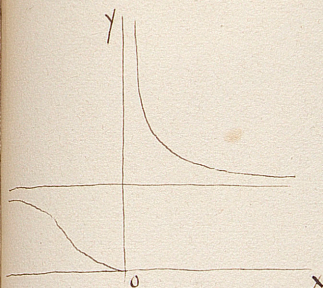
$$\dots$$

$$\varphi^m(x') = f^m(x')$$

Donc en remplaçant dans le développement ci-dessus, nous aurons l'Éq. de la courbe osculatrice :

$$y = f(x') + (x - x')f'(x') + \frac{(x - x')^2}{1.2}f''(x') + \dots + \frac{(x - x')^m}{1.2\dots m}f^{(m)}(x').$$

Quoique en général l'ordre du contact de deux courbes soit limité, il peut arriver pour les courbes transcendantes que l'ordre du contact soit infini. — ainsi la courbe



$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

qui a la forme ci-contre, est tangente à l'axe des x à l'origine. Mais les dérivées successives reproduisant indéfiniment la fonction proposée, sont toutes nulles comme cette fonction : le contact est donc d'un ordre infini.

Changements de variable indépendante.

Soient y et x deux variables fonctions d'une même variable indépendante t, comme seraient les coordonnées des positions successives d'un mobile en fonction du temps. Pour obtenir l'Eq. de la trajectoire, il faudrait éliminer t entre les deux équations

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

et même, pour avoir la tangente à cette courbe ou pour trouver $\frac{dy}{dx}$, il semble nécessaire d'éliminer d'abord t, pour prendre ensuite x comme variable indépendante. Mais cette élimination peut n'être pas possible : et elle est d'ailleurs inutile.

En effet, si x était la variable indépendante, y et t étant des fonctions d'x, on aurait :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

D'où l'on voit que $\frac{dy}{dx}$ est égal au quotient des dérivées de y et de x par rapport à t considéré comme variable indépendante. ou bien encore : $\frac{dy}{dx}$ est égal au rapport des différentielles par rapport à t des fonctions de t que y et x représentent.

Ce dernier résultat fait voir que dans un calcul où n'entrera que la dérivée du 1er ordre, la notation ne changera pas si l'on représente encore par dy et dx les différentielles par rapport à t, lorsque cette quantité est prise pour variable indépendante.

Cherchons maintenant $\frac{d^2y}{dx^2}$, ou la dérivée de $\frac{dy}{dx}$. on l'obtiendra, d'après ce qui vient d'être dit, en prenant divisant la différentielle de $\frac{dy}{dx}$ par rapport à t, par la différentielle de x relativement à t. Car

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$$

ou bien

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

on trouverait de même la dérivée troisième.

Soit l'équation

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

laquelle implique que y est une fonction d'x, et proposons-nous de prendre pour variable indépendante l'arc s pour lequel

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \qquad (a)$$

Il faut, dans les formules générales trouvées pour $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$, exprimer que la nouvelle variable est l'arc: et c'est à quoi l'on arrive en éliminant tous les x, explicites et implicites, au moyen de la relation (a). on en déduit

$$1 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2$$

d'où

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}$$

Donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}$$

on aura de même

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}$$

et, en substituant,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\left[1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]^3}$$

on continuerait de même pour les dérivées des ordres suivants.

Soit une relation

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right)=0$$

on veut passer à un autre système de coordonnées, r et θ, qui ont avec x et y les relations

$$\begin{cases} \varphi(x,y,r,\theta)=0 \\ \psi(x,y,r,\theta)=0 \end{cases}$$

Il faut, entre ces trois équations, éliminer x et y. — Prenons θ pour nouvelle variable indépendante.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{d\theta}\cdot\frac{d^2y}{d\theta^2} - \frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d^2x}{d\theta^2}}{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^3}$$

Mais je puis différentier les deux Eq. φ et ψ par rapport à θ en regardant x, y et r comme fonctions de θ, et il vient

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\theta} + \frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{d\theta} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{d\theta} + \frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{d\theta} = 0 \\ \frac{d\psi}{d\theta} + \frac{d\psi}{dr}\frac{dr}{d\theta} + \frac{d\psi}{dy}\frac{dy}{d\theta} + \frac{d\psi}{dx}\frac{dx}{d\theta} = 0 \end{cases}$$

Ces deux équations feront connaître les deux inconnues $\frac{dx}{d\theta}$ et $\frac{dy}{d\theta}$.

Pour avoir $\frac{d^2y}{dx^2}$, on différentierait encore une fois.

D'après cela, proposons-nous de transformer en coordonnées polaires r et θ la valeur du rayon de courbure

$$\rho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

Entre x, y, r et θ existent les relations

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \end{cases}$$

Différentions :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta \\ \dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta \end{cases}$$

Par une seconde différentiation, on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{d\theta^2} = \dfrac{d^2r}{d\theta^2}\cos\theta - 2\sin\theta\dfrac{dr}{d\theta} - r\cos\theta \\ \dfrac{d^2y}{d\theta^2} = \sin\theta\dfrac{d^2r}{d\theta^2} + 2\cos\theta\dfrac{dr}{d\theta} - r\sin\theta \end{cases}$$

Substituant ces quatre valeurs dans l'expression de ρ, on aurait le résultat cherché. Mais on ferait ainsi des opérations inutiles. Car l'expression du rayon de courbure ne contenant pas explicitement θ (car ce rayon ne change pas quand on change l'axe polaire) on peut supposer celui-ci nul, ce qui revient à faire coïncider l'axe polaire avec la direction du rayon vecteur au point M. alors $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = 0$, et les valeurs trouvées deviennent :

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \qquad \frac{dy}{d\theta} = r$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = \frac{d^2r}{d\theta^2} - r \qquad \frac{d^2y}{d\theta^2} = 2\frac{dr}{d\theta}$$

Substituant ces résultats dans les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$, il vient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}$$

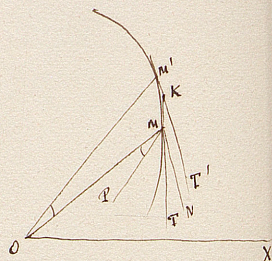
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2} + r^2}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^3}$$

on pouvait prévoir que telle serait la valeur de $\frac{dy}{dx}$: car le rayon vecteur actuel, ou l'axe polaire, étant l'axe des x primitif, l'angle que fait la tangente avec le rayon vecteur est égal à l'angle de cette tangente avec l'axe des x.

Donc, en substituant :

$$\rho = \frac{\left[1 + \frac{r^2}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\right]^{\frac{3}{2}} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^3}{2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2} + r^2} = \frac{\left[r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}$$

Cette valeur du Rayon de courbure en coordonnées polaires peut se trouver directement.



Le point donné étant M, en ce point et en un point voisin M' je mène les tangentes MT, M'T'. Soit $d\varphi$ l'angle de contingence. $\Delta\varphi$ sera l'angle TKT', et nous aurons

$$\Delta\varphi = OMN - OMT$$

en menant MN parallèle à M'T' : puis, si MP est parallèle à OM' :

$$\Delta\varphi = OMP + PMN - OMT = \Delta\theta + OM'T' - OMT$$

Mais la différence OM'T' – OMT est la différence des angles V et V'

que font les tangentes avec les rayons vecteurs. on peut donc la représenter par Δv :

$$\Delta \varphi = \Delta \theta + \Delta v$$

(résultat qui se trouve immédiatem^t. sur la figure en observant que $\varphi = \theta + v$) : valeur remarquable, dont nous ferons usage par la suite, et d'où l'on tire

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta \theta} = 1 + \frac{\Delta v}{\Delta \theta}$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = 1 + \frac{dv}{d\theta}$$

or on a

$$\operatorname{tg} v = r \frac{d\theta}{dr}$$

d'où

$$\frac{1}{\cos^2 v} \frac{dv}{d\theta} = \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r \frac{d^2 r}{d\theta^2}}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

d'autre part,

$$\cos^2 v = \frac{dr^2}{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \frac{\frac{dr^2}{d\theta^2}}{\frac{dr^2}{d\theta^2} + r^2}$$

par suite

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{\frac{dr^2}{d\theta^2} - r \frac{d^2 r}{d\theta^2}}{\frac{dr^2}{d\theta^2} + r^2}$$

alors

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r \frac{d^2 r}{d\theta^2}}{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}$$

Mais on a $\rho = \frac{ds}{d\varphi}$ et $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\frac{dr^2}{d\theta^2} + r^2}$. Donc enfin

$$\rho = \frac{\frac{ds}{d\theta}}{\frac{d\varphi}{d\theta}} = \frac{\left[r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2 r}{d\theta^2}} = \frac{\left(dr^2 + r^2 d\theta^2\right)^{\frac{3}{2}}}{d\theta\left(r^2 d\theta^2 + 2dr^2 - r d^2 r\right)}$$

Applications à Quelques Courbes.

Spirale Logarithmique.

Son Équation est

$$r = k e^{m\theta}.$$

on tire delà

$$\frac{dr}{d\theta} = m k e^{m\theta} = m r$$

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} = m^2 k e^{m\theta} = m^2 r$$

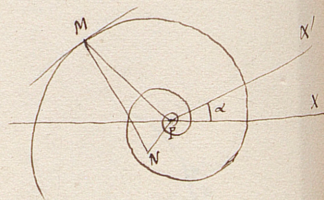
Donc

$$\rho = \frac{r^3 (m^2+1)^{\frac{3}{2}}}{r^2 (1+2m^2-m^2)} = r\sqrt{1+m^2}$$

Si l'on cherche la Sous-normale :

$$S_n = \frac{dr}{d\theta} = m r$$

et l'on aura pour la Normale



$$MN = \sqrt{r^2 + m^2 r^2} = r\sqrt{1+m^2} = \rho$$

ainsi le point N est le centre de Courbure, et le lieu des points N est la développée. — Cherchons son Équation.

$$NP = MP \operatorname{tg} PMN = S_n = m r$$

$$r' = m k e^{m\theta}$$

Telle est l'Eq. de la développée. Seulement, θ n'est pas l'angle que fait l'axe avec le rayon vecteur, mais avec une perpendiculaire MP au rayon vecteur. Si nous voulons ramener cette Eq. à la forme

ordinaire, soit Px' un nouvel axe polaire faisant avec le premier un angle α : nous aurons

$$\theta' + \alpha = \theta + \frac{\pi}{2}$$

D'où

$$\theta = \theta' + \alpha - \frac{\pi}{2}$$

et l'Eq. devient

$$r' = mke^{m\theta'} e^{\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)m}$$

or, on peut disposer de α de manière que

$$me^{m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = 1$$

car il suffit de poser $\mathcal{L}m + m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ d'où $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\mathcal{L}m}{m}$.

ainsi, pour cette valeur de α, l'Eq. de la développée relativement au nouvel axe polaire prend la forme

$$r' = ke^{m\theta'}$$

elle représente donc la même Spirale que la proposée.

Coniques.

Leur Eq. Générale est

$$y^2 = 2ax + bx^2$$

Cherchons le rayon de courbure, dont la valeur générale est

$$\rho = \pm \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

Pour déterminer p, je différentie la proposée.

$$y\frac{dy}{dx} = a + bx$$

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{a+bx}{y}$$

Différentiant une seconde fois

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{by - (a+bx)\frac{dy}{dx}}{y^2} = \frac{by^2 - (a+bx)^2}{y^3} = \frac{2abx + b^2x^2 - (a+bx)^2}{y^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = q = -\frac{a^2}{y^3}$$

Par conséquent :

$$\rho = \pm \frac{\left(1 + \frac{(a+bx)^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}} y^3}{a^2}$$

Si maintenant nous cherchons la longueur de la normale :

$$N = y\sqrt{1+p^2}$$

D'où

$$N^3 = y^3\left(1 + \frac{(a+bx)^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Comparant cette valeur à celle du rayon de courbure, on voit que l'on a

$$\rho = \frac{N^3}{a^2}$$

d'où

Th. Le Rayon de courbure d'une Conique est égal au cube de la Normale divisé par le carré du Paramètre.

Pour avoir les développées des Coniques, il faut éliminer x et y entre ces équations

$$\begin{cases} y - \beta = -\dfrac{1+p^2}{q} \\ x - \alpha = \dfrac{p(1+p^2)}{q} \\ y^2 = 2ax + bx^2 \end{cases}$$

Soit d'abord le cas de la Parabole :

$$b = 0, \quad y^2 = 2ax, \quad p = \frac{a}{y}, \quad q = -\frac{a^2}{y^3}$$

Les 3 Eq. sont donc

$$\begin{cases} y-\beta = \dfrac{1+\frac{a^2}{y^2}}{\frac{a^2}{y^3}} = y + \dfrac{y^3}{a^2} \\ x-\alpha = -\dfrac{\frac{a}{y}\left(1+\frac{a^2}{y^2}\right)}{\frac{a^2}{y^3}} = -\dfrac{a(y^2+a^2)}{a^2} = -\left(a+\dfrac{y^2}{a^2}\right) \\ y^2 = 2ax \end{cases}$$

D'où l'on déduit

$$\beta = -\frac{y^3}{a^2} \qquad \alpha = -\beta^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}} \qquad x = \alpha - \left(a + \frac{2ax}{a}\right) = \frac{\alpha - a}{3}$$

Substituant dans $y^2 = 2ax$ ces valeurs d'x et y :

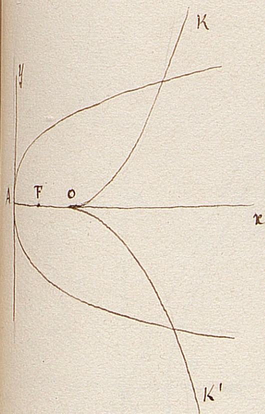
$$\alpha^{\frac{1}{3}} \beta^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}(\alpha - a) \qquad \beta^2 = \frac{8}{27a}(\alpha - a)^3$$

$$\beta = \pm \frac{2}{3}(\alpha - a)\sqrt{\frac{1}{3}\frac{\alpha - a}{a}}$$

Si l'on transporte l'axe des ordonnées parallèlement à lui-même jusqu'au point O tel que $AO = a$, l'éq. prend la forme plus simple

$$\beta^2 = \frac{8}{27a}\alpha^3$$

$$\beta = \pm\sqrt{\frac{8}{27a}\alpha^3}$$



En construisant cette courbe, on reconnaît qu'elle a la forme KOK', symétrique par rapport à l'axe des x.

En différentiant, on trouve

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{27a}}\,\alpha^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{8}{27a}}\,\alpha^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6a}}\,\alpha^{-\frac{1}{2}}$$

Le signe de $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$ est le même que celui de $\frac{d\beta}{d\alpha}\beta$. Par conséquent la courbe tourne sa convexité vers l'axe des x.

On rencontre cette courbe en Géométrie analytique comme

lieu des points d'où l'on ne peut mener à la Parabole que deux normales.

Pour les deux autres coniques, on trouve des équations trinômes. Celle de l'ellipse qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est

$$\left(\frac{\alpha}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\beta}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \qquad (1)$$

en posant

$$\begin{cases} A = \dfrac{c^2}{a} \\ B = \dfrac{c^2}{b} \end{cases}$$

Remarquons d'abord que cette équation peut être mise sous une forme rationnelle par deux élévations au cube. Il vient par une 1ère élévation au cube

$$\left(\frac{\alpha}{A}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{B}\right)^2 + 3\left(\frac{\alpha}{A}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\beta}{B}\right)^{\frac{2}{3}}\left\{\left(\frac{\alpha}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\beta}{B}\right)^{\frac{2}{3}}\right\} = 1$$

et ensuite, en observant que la quantité entre parenthèses est égale à 1 (c'est ce qui fait le succès de la méthode) :

$$\left(\frac{\alpha}{A}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{B}\right)^2 + 3\left(\frac{\alpha}{A}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\beta}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

d'où

$$27\left(\frac{\alpha}{A}\right)^2\left(\frac{\beta}{B}\right)^2 = \left\{1 - \left(\frac{\alpha}{A}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{B}\right)^2\right\}^3$$

équation du sixième degré.

La courbe coupe les axes de l'ellipse aux distances $\pm A$ et $\pm B$, la 1ère $< a$, la 2e pouvant être $\gtrless b$.

En différentiant deux fois l'Eq. (1), on obtient

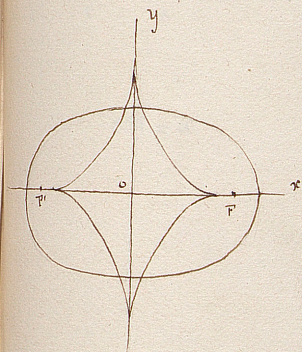
$$\frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{A}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{A} + \frac{2}{3}\left(\frac{\beta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{d\beta}{B} = 0$$

puis

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{A}\right)^{-\frac{4}{3}}\frac{d\alpha^2}{A^2}-\frac{1}{3}\left(\frac{\beta}{B}\right)^{-\frac{4}{3}}\frac{d\beta^2}{B^2}+\left(\frac{\beta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{d^2\beta}{B}=0$$

D'où

$$\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}=\frac{\left(\frac{\alpha}{A}\right)^{-\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{A^2}+\left(\frac{\beta}{B}\right)^{-\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{B^2}\cdot\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}{3\left(\frac{\beta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{B}}$$



or le signe de cette quantité est celui de son dénominateur, puisque le numérateur est positif. Elle est donc de même signe que β : donc, en tous les points, la courbe est convexe vers l'axe des abscisses.

De plus, comme l'on a

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{\left(\frac{\alpha}{A}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{A}}{\left(\frac{\beta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{B}}=-\frac{B}{A}\left(\frac{A\beta}{B\alpha}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

la courbe est tangente aux axes aux points où elle les rencontre, de sorte que là elle présente des rebroussements de première espèce.

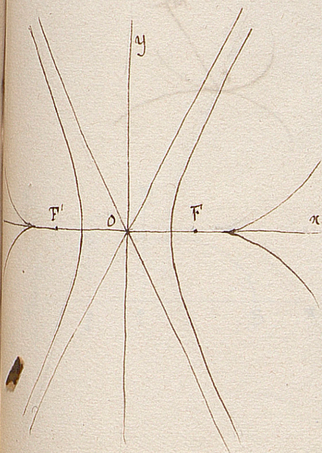
On lui trouve donc la forme de la figure.

Quant à l'Hyperbole, dont l'Eq. est

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

on aura pour la développée une Eq. semblable

$$\left(\frac{\alpha}{A}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{\beta}{B}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$



La discussion de cette courbe montre qu'elle a des branches illimitées qui s'étendent symétriquement des deux côtés des axes ; et qu'elle présente des points de rebroussement aux points où elle rencontre et touche l'axe des x.

Cycloïde.

On appelle Cycloïde ou quelquefois Roulette le lieu des positions successives d'un point M d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite fixe. — Il s'agit d'en trouver l'Eq. et les propriétés.

Ce problème est un cas particulier de celui-ci : trouver le Lieu d'un point quelconque du plan invariablement lié à une courbe quelconque qui roule sur une autre courbe. — On dit qu'une courbe roule sur une autre lorsque les éléments successifs de cette courbe viennent s'appliquer l'un après l'autre sur ceux de la seconde ; les éléments qui viennent à coïncider étant égaux. La deuxième courbe glisse sur la 1ère quand le même point de la courbe mobile parcourt successivement tous les points de la seconde. Enfin, il y a à la fois roulement et glissement quand les éléments des deux courbes qui coïncident successivement ne sont pas égaux.

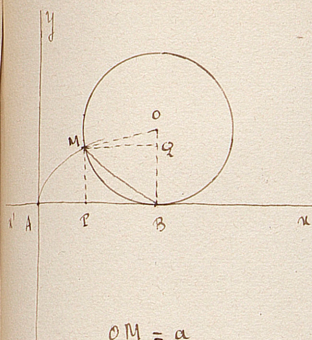
Cela posé, la propriété caractéristique du Lieu, en Général, est que la droite qui joint le point décrivant M au point de contact actuel C des deux courbes, est normale au lieu au point M. — On arrive facilement à ce Théorème par la considération des polygones infinitésimaux dont les deux courbes sont les limites.



Si les courbes sont toutes deux des cercles, le lieu prend le nom d'Epicycloïde. — Quand le rayon du cercle fixe devient infini, ce cercle se réduit à une droite, et le lieu

est la cycloïde, dont nous allons nous occuper.

A étant le point où le point décrivant M est venu coïncider avec la directrice xx', l'éq. naturelle de la cycloïde est



$$AB = \text{arc } BM$$

Il s'agit de la traduire en coordonnées ordinaires. Or

$$AB = x + BP = x + \sqrt{a^2 - (a-y)^2} = x + \sqrt{2ay - y^2}$$

$$\text{arc } MB = a.\text{arc cos.}\frac{OQ}{OM} = a.\text{arc cos}\frac{a-y}{a}$$

Donc

$$x = a \text{ arc cos}\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay-y^2}$$

Telle est l'équation de la cycloïde. — Mais elle a été obtenue dans une position particulière du cercle, lorsque le point mobile tend à s'élever. — Si ce point tendait à redescendre, il faudrait changer le signe du radical.

Th. Toutes les cycloïdes sont semblables.

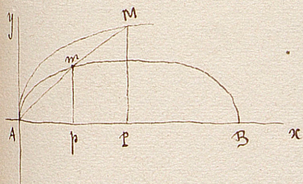
Mettons en évidence dans l'équation les rapports $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{a}$:

$$\frac{x}{a} = \text{arc cos}\left(1 - \frac{y}{a}\right) - \sqrt{2\frac{y}{a} - \left(\frac{y}{a}\right)^2}$$

et, posant

$$\frac{x}{a} = X \quad \frac{y}{a} = Y$$

$$X = \text{arc cos}(1-Y) - \sqrt{2Y - Y^2}$$



Soit AmB la cycloïde dont voilà l'équation, et qui est engendrée par le cercle de rayon 1. Quel est, sur la droite Am, le point M appartenant à la cycloïde de rayon a, et supposée prenant son origine en A? Le rapport des distances AM et Am est celui des ordonnées MP et mp. Donc, en désignant par

x et y les coordonnées de M,

$$\frac{y}{Y} = \alpha = \frac{MP}{mp} = \frac{x}{X}$$

et par conséquent

$$MP = a \cdot mp$$

et

$$AM = a \cdot Am$$

c.à.d. que pour obtenir la seconde Cycloïde au moyen de la première, il suffit d'augmenter les rayons vecteurs de celle-ci dans un rapport constant. or telle est la définition de deux Courbes semblables. donc ... c.q.f.d.

Cette propriété tient à ce qu'il n'entre dans l'Equation de la Cycloïde qu'un seul paramètre variable a. _ C'est ainsi que toutes les paraboles dont l'Equation Générale est $y^2 = 2px$ sont semblables.

Pour discuter commodément la Courbe, il est bon d'introduire dans son Equation une variable arbitraire dont x et y seront des fonctions. on choisit généralement l'angle que fait la perpendiculaire abaissée du centre du cercle sur la droite fixe avec le rayon qui va au point M. on a alors

$$\begin{cases} x = a(\omega - \sin\omega) \\ y = a(1 - \cos\omega) \end{cases}$$

Ces deux formules sont vraies pour toutes les positions du point M, comme il est facile de le vérifier.

on voit tout de suite que la valeur maxima de y est a, et que l'ordonnée atteint cette valeur quand le point de contact avec la droite fixe et le point M sont aux extrémités d'un même diamètre, ce qui arrive quand le cercle a fait une demi-

révolution. De plus, de part et d'autre de ce maximum, la courbe se compose de deux moitiés symétriques qui s'abaissent jusqu'à l'axe des x, en tournant vers lui leur concavité, et le point le plus bas est un rebroussement de 1re espèce ; car la tangente y est perp. à xx', vu qu'on a

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}$$

ce qui devient ∞ pour $y = 0$. — La cycloïde se compose d'ailleurs d'un nombre infini de parties semblables.

La Sous-Normale ayant pour valeur $y\frac{dy}{dx}$, on voit qu'elle est égale à $\sqrt{2ay - y^2}$. Or

$$\sqrt{2ay - y^2} = \sqrt{y(2a - y)} = \sqrt{BQ \cdot QL} = PB.$$

Donc MB est la Normale au point M, et par suite ML, perp. à BM, est la tangente.

De là résulte un moyen très-simple de mener la tangente en un point M de la Cycloïde. Par le point M on mène MM' parallèle à Ax jusqu'à la rencontre M' du cercle décrit sur l'ordonnée maxima L'B' comme diamètre : M'L' est parallèle à la tangente au point M, laquelle est dès lors déterminée.

Au moyen de la valeur de la Sous-normale, on peut encore reconnaître d'une autre manière que MB est la Normale. Calculons en effet la Normale.

$$N^2 = y^2 + \frac{y^2 dy^2}{dx^2} = y^2 + (2ay - y^2) = 2ay$$

N est donc moyenne proportionnelle entre LQ et BL : MB est donc bien la normale.

Soit proposé de déterminer le Centre de Courbure. Nous avons déjà trouvé

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y}$$

D'où
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2a}{y} - 1$$
Pour avoir $\frac{d^2y}{dx^2}$, différentions:
$$2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2a}{y^2}\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}$$
En substituant dans
$$\rho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$
il vient
$$\rho^2 = \frac{\left(\frac{2a}{y}\right)^3}{\left(\frac{a}{y^2}\right)^2} = 8ay$$
$$\rho = 2\sqrt{2ay} = 2MB.$$
Comme d'ailleurs MB est la normale, on aura le centre de courbure en prolongeant MB jusqu'en N d'une quantité égale à elle-même. Ce résultat permet de déterminer d'une manière très simple la développée sans qu'il soit nécessaire d'en chercher l'équation. En effet, soit BNK un cercle égal au cercle BM et tangent en B à l'axe Ax de l'autre côté. Menons par K, KE parallèle à Ax, et prolongeons le diamètre LB' jusqu'en E. On aura évidemment

$$\text{arc}\, MB = AB$$
d'où
$$\text{Arc. } NB = AB$$
d'autre part,
$$BNK = AB'$$
donc, en retranchant
$$\text{arc}\, NK = KE$$

Cela fait voir que la cycloïde a pour développée une cycloïde égale engendrée par le mouvement d'un cercle égal au cercle MB, mais qui roulerait sur KE, parallèle à Ax, au-dessous de cette droite, et à une distance de celle-ci égale au diamètre du

cercle mobile. Cette cycloïde aurait la forme AEA'...
On peut d'ailleurs démontrer sans la considération des rayons de courbure que la cycloïde AEA'. et la développée de AL'A'. En effet, ces deux cycloïdes étant égales entre elles, et les deux cercles BME et BNR étant de même rayons, MN sera la tangente en N à la seconde cycloïde. Donc cette cycloïde est l'enveloppe des normales à la 1ère, et par suite, en est la développée.

Cherchons maintenant directement l'Eq. de la développée on a

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}$$

Substituons ces valeurs dans les Equations

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{dy^2}{dx^2} + (y-\beta)\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0 \\ x - \alpha + (y-\beta)\dfrac{dy}{dx} = 0 \end{cases}$$

La 1ère deviendra

$$\frac{2a}{y} - (y-\beta)\frac{a}{y^2} = 0$$

d'où

$$y = -\beta$$

La 2e. donnera

$$x - \alpha - 2\beta\sqrt{\frac{2a}{y} - 1} = 0$$

d'où

$$x = \alpha + 2\beta\sqrt{\frac{2a}{\beta} - 1}$$

Mais β est négatif, puisque $y > 0$ et $\beta = -y$. Donc, en faisant passer β sous le radical, on a

$$x = \alpha - 2\sqrt{-2a\beta - \beta^2}$$

Substituant ces valeurs de x et y dans l'Eq. de la cycloïde, il vient

$$\alpha = a \cdot \text{arc}\cos\frac{a+\beta}{a} + \sqrt{-2a\beta + \beta^2}$$

Cette Équation ressemble beaucoup à celle de la Cycloïde. On peut rendre leur identité parfaite en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes au point E. Il faudra poser

$$\beta = y' - 2a$$

$$\alpha = x' + a\pi$$

Substituons ces valeurs. Il vient, pour l'Éq. de la Développée

$$x' + a\pi = a.\ \text{arc Cos}\ \frac{a+y'-2a}{a} + \sqrt{(2a-y')(2a+y'-2a)}$$

$$x' = -a\left(\pi - \text{arc Cos}\ \frac{y'-a}{a}\right) + \sqrt{2ay'-y'^2}$$

Mais l'arc dont le cosinus est $\frac{y'-a}{a}$ est le supplément de l'arc $\pi - \text{arc Cos}\ \frac{y'-a}{a}$. Ces deux arcs ont donc des cosinus égaux et de signes contraires : donc

$$\pi - \text{arc Cos}\ \frac{y'-a}{a} = \text{arc Cos}\ \frac{a-y'}{a}$$

Donc l'Éq. de la Développée est

$$x' = -a.\ \text{arc Cos}\ \frac{a-y'}{a} + \sqrt{2ay'-y'^2}$$

Enfin, si nous convenons de compter les x' non pas dans le sens KE, comme nous comptions α, mais dans le sens EK, nous changerons le signe du 2^{d} membre de notre Équation, et il viendra enfin

$$x' = a.\ \text{arc Cos}\ \frac{a-y'}{a} - \sqrt{2ay'-y'^2}$$

~~qui~~ Éq. identique à celle de la Cycloïde proposée.

Au point A, le rayon de courbure de la Cycloïde proposée est nul, puisque sa moitié MB devient nulle pour ce point. Donc, comme un arc de la Développée est égal à la différence des rayons de courbure extrêmes, il en résulte que l'arc AN de la Développée est égal au rayon de courbure MN, ou au

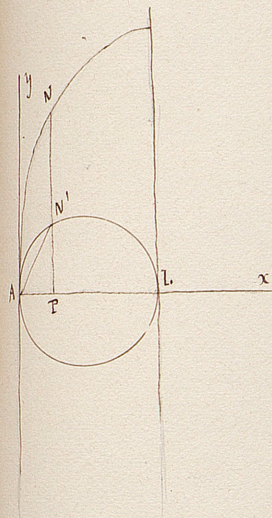
double de BN. L'arc AE est donc aussi égal à EL' = 4a.
La Cycloïde est donc une courbe rectifiable.

D'après le même théorème, nous aurons encore

$$\text{arc } AN = 2\, AN'$$

D'où cette Proposition :

L'arc de cycloïde compté à partir du sommet est le double de la corde de l'arc ~~central~~ de cercle central qui en est la projection.



Donc, si nous prenons pour axe des x le diamètre AL de ce cercle central, et pour celui des y la tangente au sommet, en désignant par s la longueur de l'arc de cycloïde AN, nous aurons

$$s = 2\sqrt{2ax}$$

$$s^2 = 8ax$$

Équation que l'on pourrait considérer comme celle de la cycloïde.
On remarquera qu'elle est toute semblable à celle de la parabole, $y^2 = 8ax$: mais le système des coordonnées est tout différent.

Différentiation des Fonctions de Plusieurs Variables Indépendantes.

Soit

$$u = f(x, y, z)$$

on peut supposer que chacune des variables varie seule à son tour, ce qui donne trois différentielles partielles, qu'on désigne par les notations

$$\frac{du}{dx}dx, \quad \frac{du}{dy}dy, \quad \frac{du}{dz}dz$$

on appelle Différentielle Totale la somme de ces trois différentielles partielles. on la représente par du :

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz$$

Lorsqu'on donne à x, y, z des accroissements arbitraires Δx, Δy, Δz, la fonction u prend un accroissement total Δu. Nous allons démontrer que Δu se compose de deux parties, l'une du, qui renferme les accroissements arbitraires à la première puissance, l'autre qui les renferme à des puissances plus élevées : d'où il suivra que le rapport de Δu à du convergera vers l'unité, quand Δx, Δy et Δz convergeront vers zéro.

Nous avons

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z)$$

ce qu'on peut écrire

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x+\Delta x, y+\Delta y, z)$$
$$+ f(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - f(x+\Delta x, y, z)$$
$$+ f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)$$

ou bien

$$\Delta u = \Delta z\{f'_z(x+\Delta x, y+\Delta y, z)+\gamma\} + \Delta y\{f'_y(x+\Delta x, y, z)+\beta\} + \Delta x\{f'_x(x,y,z)+\alpha\}$$

γ devenant nul avec Δz, β avec Δy, α avec Δx. — Mais $f'_z(x+\Delta x, y+\Delta y, z)$ ne diffère de $f'_z(x,y,z)$ que d'une quantité qui devient nulle avec Δx et Δy, en supposant f'_z continue. De même pour $f'_y(x+\Delta x, y, z)$. Donc on peut écrire

$$\Delta u = \left(\frac{du}{dz}\Delta z + \frac{du}{dy}\Delta y + \frac{du}{dx}\Delta x\right) + \gamma'\Delta z + \beta'\Delta y + \alpha'\Delta x$$

La quantité entre parenthèses n'est autre que la différentielle totale du. C'est donc démontré que Δu se compose de du, plus une quantité qui contient les puissances supérieures de $\Delta x, \Delta y, \Delta z$: car α', β', γ' sont nécessairement fonctions de ces quantités.

Il suit delà que

$$\frac{\Delta u}{du} = 1 + \frac{\alpha'\Delta x + \beta'\Delta y + \gamma'\Delta z}{du} = 1 + \frac{\alpha' + \beta'\frac{\Delta y}{\Delta x} + \gamma'\frac{\Delta z}{\Delta x}}{\frac{du}{\Delta x}}$$

D'où l'on conclut que si les rapports $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ qui entrent aux deux termes conservent une valeur finie, on a

$$\lim \frac{\Delta u}{du} = 1.$$

Si la fonction $f(x,y,z)$ est constante dans un certain intervalle, toutes ses dérivées sont nulles dans cet intervalle. Car il résulte de ce qui a été démontré pour les fonctions d'une seule variable que toutes ses dérivées partielles sont nulles: donc aussi la dérivée totale.

Cherchons les dérivées et les différentielles des ordres supérieurs.

Soit seulement

$$u = f(x,y)$$

Les coefficients différentiels partiels du 1er. ordre étant

$$\frac{du}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{du}{dy}$$

on peut différentier chacun d'eux par rapport à x et à y, ce qui donnera

$$\frac{d^2u}{dx^2} \quad \frac{d^2u}{dx\,dy} \quad \frac{d^2u}{dy\,dx} \quad \frac{d^2u}{dy^2}$$

ce qui seraient les coefficients différentiels pour le second ordre. Mais on démontre que

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{d^2u}{dy\,dx}$$

c.àd. que l'ordre dans lequel on effectue les différentiations par rapport à x ou à y n'influe point sur le résultat.

On a en effet

$$\frac{du}{dx} = f'_x(x,y)$$

et donnons à y un accroissement Δy.

$$\Delta\frac{du}{dx} = f'_x(x, y+\Delta y) - f'_x(x,y)$$

ou bien

$$\frac{\Delta \frac{du}{dx}}{\Delta y} = \frac{f'_x(x,y+\Delta y) - f'_x(x,y)}{\Delta y}$$

au numérateur, il y a une différence de dérivées, on peut donc écrire

$$\frac{\Delta \frac{du}{dx}}{\Delta y} = \frac{\frac{d}{dx}\left\{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)\right\}}{\Delta y}$$

Mais Δy ne varie pas avec x. Donc

$$\frac{\Delta \frac{du}{dx}}{\Delta y} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\right\}$$

Faisons tendre Δy vers zéro ; il vient

$$\frac{d \frac{du}{dx}}{dy} = \frac{d \frac{du}{dy}}{dx}$$

ou

$$\frac{d^2 u}{dx\, dy} = \frac{d^2 u}{dy\, dx}$$

C.q.f.d.

On peut facilement généraliser ce résultat, c.à.d. démontrer que

$$\frac{d^{m+n+1} u}{dx^m dy^n dx} = \frac{d^{m+n+1} u}{dx^{m+1} dy^n}$$

En effet, d'après ce qui vient d'être démontré,

$$\frac{d^{m+n+1} u}{dx^m dy^n dx} = \frac{d^{m+n+1} u}{dx^m dy^{n-1} dy\, dx} = \frac{d^{m+n+1} u}{dx^m dy^{n-1} dx\, dy}$$

Mettant de côté la dernière différentiation par rapport à y, on démontrera que

$$\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^{n-1} dx} = \frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^{n-1} dx\, dy}$$

et ainsi de suite, de sorte qu'on arrivera enfin à

$$\frac{d^{m+2}u}{dx^m dy\, dx} = \frac{d^{m+2}u}{dx^m dx\, dy} = \frac{d^{m+2}u}{dx^{m+1} dy}$$

et rétablissant alors toutes les différentiations négligées relatives à y, on aura l'égalité à démontrer.

Cette égalité aurait lieu d'ailleurs quel que fût le nombre des variables indépendantes.

Cherchons maintenant la différentielle totale du second ordre. Nous avions pour le premier

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz$$

Pour le second, on définit la différentielle totale la somme des différentielles totales de chacune des différentielles partielles du premier. — on a donc

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2} dx^2 + 2\frac{d^2u}{dx dy} dx dy + 2\frac{d^2u}{dx dz} dx dz + \frac{d^2u}{dy^2} dy^2 + 2\frac{d^2u}{dy dz} dy dz + \frac{d^2u}{dz^2} dz^2$$

On représente symboliquement ce résultat par

$$d^2u = \left[\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz\right]^2$$

en convenant de remplacer l'exposant de du par un indice de différentiation, $(du)^2$ par d^2u.

Cette loi est générale. — Supposons qu'elle ait lieu pour $n-1$ différentiations, de sorte qu'on ait symboliquement

$$d^{n-1}u = \left[\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz\right]^{n-1}$$

Je dis qu'on aura la même égalité pour $d^n u$. — Le terme général de $d^{n-1}u$ est de la forme

$$(1)\quad A\,\frac{d^{n-1}u}{dx^p\,dy^q\,dz^r}\,dx^p\,dy^q\,dz^r \qquad p+q+r=n-1$$

Le terme général du développement symbolique sera

$$(2)\quad A'\,\frac{du^{n-1}}{dx^p\,dy^q\,dz^r}\,dx^p\,dy^q\,dz^r$$

Pour avoir le terme général de la différentielle totale du n^e. ordre, il faut différentier (1) par rapport aux trois variables, ce qui donne

$$A\,\frac{d^n u}{dx^{p+1}\,dy^q\,dz^r} + A\,\frac{d^n u}{}$$

$$A\,\frac{d^n u}{dx^{p+1}\,dy^q\,dz^r}\,dx^{p+1}\,dy^q\,dz^r + A\,\frac{d^n u}{dx^p\,dy^{q+1}\,dz^r}\,dx^p\,dy^{q+1}\,dz^r + A\,\frac{d^n u}{dx^p\,dy^q\,dz^{r+1}}\,dx^p\,dy^q\,dz^{r+1}$$

Mais pour obtenir les termes correspondants de la puissance n^e. de du — au moyen de (2), il faut multiplier (2) par la 1ère. puissance de du ; ce qui donne

$$A\,\frac{du^n}{dx^{p+1}\,dy^q\,dz^r}\,dx^{p+1}\,dy^q\,dz^r + A\,\frac{du^n}{dx^p\,dy^{q+1}\,dz^r}\,dx^p\,dy^{q+1}\,dz^r + A\,\frac{du^n}{dx^p\,dy^q\,dz^{r+1}}\,dx^p\,dy^q\,dz^{r+1}$$

ainsi la loi se continue ; elle est donc générale, et l'on a

$$d^n u = \left[\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dz}\,dz\right]^n$$

Fonctions Implicites.

Soit z une fonction de x et de y donnée par

$$f(x, y, z) = 0$$

on demande dz.

Si l'on suppose que dans le 1er. membre de l'équation on remplace z par sa valeur en fonction de x et de y, l'Eq. deviendra identique, et les dérivées totales ou partielles du 1er. membre seront nulles. — Mais alors, nous pouvons différentier $f(x, y, z)$ qui est supposé ne plus contenir que les deux variables indépendantes x et y. Nous aurons donc pour les différentielles partielles, d'après les règles des fonctions de fonctions,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = 0 & (1) \\ \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dy} = 0 & (2) \end{array} \right.$$

De ces deux Eq. on tirera les deux différentielles partielles. z entrera aussi dans ces expressions, et ne pourra être éliminé que quand on saura résoudre l'Eq. proposée.

Pour avoir la différentielle totale, il faut faire la somme des différentielles partielles: on peut y arriver en multipliant (1) par dx, (2) par dy, et ajoutant:

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0$$

De là on tirerait dz. — Cette Eq. a l'avantage d'être symétrique, et s'applique aussi bien aux différentielles de x ou y considérées comme fonctions de deux autres variables, qu'à la différentielle de z en regardant x et y comme variables indépendantes.

Passons aux différentielles du 2e. ordre.

Nous avons trois dérivées partielles à chercher. — Si l'on

veut avoir $\frac{d^2z}{dx^2}$, on différentiera (1) par rapport à x, en regardant z et $\frac{dz}{dx}$ comme des fonctions d'x ; car l'Eq. (1) devient identique si l'on remplace ces deux fonctions par leurs valeurs en x et en y. — on aura ainsi

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dx\,dz}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{d^2f}{dz^2}\frac{dz^2}{dx^2} + \frac{df}{dz}\,\frac{d^2z}{dx^2} = 0$$

ce qu'on peut écrire symboliquement

$$\left(\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{df}{dz}\frac{d^2z}{dx^2} = 0$$

on tirera delà $\frac{d^2z}{dx^2}$ en remplaçant $\frac{dz}{dx}$ par sa valeur déjà connue.

En différentiant (2) par rapport à y, on aura une équation qui donnera $\frac{d^2z}{dy^2}$.

Le 3e. coefficient différentiel partiel s'obtiendrait en différentiant (1) par rapport à y, ou (2) par rapport à x. Le 1er. mode donnera

$$\frac{d^2f}{dx\,dy} + \frac{d^2f}{dx\,dz}\frac{dz}{dy} + \frac{d^2f}{dz\,dy}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2f}{dz^2}\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{d^2z}{dx\,dy} = 0$$

dz^2 serait la somme des trois différentielles partielles, et serait donné par l'Eq. symbolique

$$d^2z = \left(\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy\right)^2$$

Si l'on multiplie les trois Eq. différentielles par dx^2, dy^2, $2dx\,dy$, leur somme donnera une Eq. qui fera connaître d^2z, en observant que, dans ces trois équations les trois inconnues ont le même coefficient, qui est $\frac{df}{dz}$.

on peut trouver directement la différentielle totale sans être obligé de chercher chaque différentielle partielle. on avait

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0$$

le dernier dz étant la différentielle totale du 1er ordre. Cette Eq. peut être considérée comme fonction de x et de y seulement, z et dz étant remplacés par leurs valeurs en fonction des deux variables indépendantes : alors, l'Eq. est identique. La dérivée totale est donc nulle, ainsi que sa différentielle :

$$\frac{d^2f}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2f}{dxdy}dxdy + 2\frac{d^2f}{dxdz}dxdz + \frac{d^2f}{dy^2}dy^2 + 2\frac{d^2f}{dydz}dydz + \frac{d^2f}{dz^2}dz^2 + \frac{df}{dz}d^2z = 0$$

ce qu'on peut écrire symboliquement

$$\left(\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz\right)^2 + \frac{df}{dz}d^2z = 0$$

Extension de la Série de Taylor aux fonctions de plusieurs variables indépendantes.

Soit une fonction

$$f(x, y \ldots z)$$

d'un nombre quelconque de variables. Donnons à $x, y \ldots z$ les accroissements $h, k, \ldots l$ et cherchons le développement de

$$f(x+h, y+k, \ldots z+l)$$

suivant les puissances ascendantes de $h, k, \ldots l$.

La méthode la plus naturelle serait de donner d'abord à x seul un accroissement h, puis de faire varier y dans tous les termes du développement obtenu, … et enfin de changer z en $z+l$ dans le dernier développement obtenu.

$$f(x+h, y \ldots z) = f(x, y \ldots z) + \frac{h}{1} f'_x(x, y \ldots z) + \frac{h^2}{1.2} f''_x(x, y \ldots z) + \cdots + R$$

Changeons y en $y+k$:

$$f(x+h, y+k, \ldots z) = f(x, y+k, \ldots z) + \frac{h}{1} f'_x(x, y+k, \ldots z) + \frac{h^2}{1.2} f''_x(x, y+k, \ldots z) + \cdots + R$$

on développera ici chacun des termes d'après la série de Taylor, dans le cas d'une seule variable. Puis, dans ces développements, on changera z en $z+l$. — Mais il sera très-pénible de trouver le terme complémentaire du développement général : car ce terme serait la somme de chacun des restes partiels donnés par chaque développement. Sa forme ne se prêterait donc pas

à la discussion. aussi préfère-t-on arriver au développement par une autre voie.

Afin de retomber sur le cas d'une seule variable, nous introduisons une variable arbitraire t, et nous nous proposerons de développer

$$f(x+th,\ y+tk,\ z+tl)$$

suivant les puissances de t. Or c'est là une fonction de t, $\varphi(t)$, qu'on peut développer par la formule de Maclaurin

$$f(x+th, y+tk, z+tl) = \varphi(t) = \varphi(0) + \frac{t}{1}\varphi'(0) + \frac{t^2}{1.2}\varphi''(0) + \dots + \frac{t^n}{1.2\dots n}\varphi^{n}(0) + \frac{t^{n+1}}{1.2\dots(n+1)}\varphi^{n+1}(\theta t)$$

Pour revenir au développement que nous voulons trouver, il suffira de faire dans celui-ci $t=1$. Nous aurons ainsi

$$f(x+h, y+k, z+l) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{1.2}\varphi''(0) + \dots + \frac{1}{1.2\dots n}\varphi^{n}(0) + \frac{1}{1.2\dots(n+1)}\varphi^{n+1}(\theta)$$

et il reste à déterminer les quantités $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$ etc.

Cherchons d'abord $\varphi'(t) \dots \varphi^n(t)$. Pour cela, je pose $x+th = x'$, $y+tk = y'$, $z+tl = z'$. En différentiant $\varphi(t)$, j'obtiens

$$\varphi'(t) = \frac{df}{dx'}h + \frac{df}{dy'}k + \frac{df}{dz'}l$$

car les relations

$$\left.\begin{array}{l} x+th = x' \\ y+tk = y' \\ z+tl = z' \end{array}\right\} \text{ donnent } \left\{\begin{array}{l} \frac{dx'}{dt} = h \\ \frac{dy'}{dt} = k \\ \frac{dz'}{dt} = l \end{array}\right.$$

J'aurai donc ensuite, symboliquement

$$\varphi''(t) = \left[\frac{df}{dx'}h + \frac{df}{dy'}k + \frac{df}{dz'}l\right]^2$$

et en général

$$\varphi^n(t) = \left[\frac{df}{dx'} h + \frac{df}{dy'} k + \frac{df}{dz'} l \right]^n$$

Delà, en faisant $t=0$,

$$\varphi^n(0) = \left[\frac{df}{dx} h + \frac{df}{dy} k + \frac{df}{dz} l \right]^n$$

Car $\frac{df}{dx'}$ est composé en $x' y' z'$ comme $\frac{df}{dx}$ est composé en $x\ y\ z$, c.a.d. que pour avoir $\frac{df}{dx'}$, il suffit de changer x, y, z en x', y', z' dans $\frac{df}{dx}$. Mais, si $t=0$, on a $x'=x$, $y'=y$, $z'=z$: donc alors

$$\frac{df}{dx'} = \frac{df}{dx}, \quad \frac{df}{dy'} = \frac{df}{dy}, \quad \frac{df}{dz'} = \frac{df}{dz}.$$

on a d'ailleurs évidemment

$$\varphi(0) = f(x, y, z)$$

Pour avoir $\varphi^{n+1}(\theta)$, il suffira de changer t en θ, c.a.d. remplacer dans $\varphi^{n+1}(0)$ x, y et z par $x+\theta h$, $y+\theta k$, $z+\theta l$.

ainsi, en définitive, symboliquement :

$$f(x+h, y+k, z+l) = f(x,y,z) + \left(h\frac{df}{dx} + k\frac{df}{dy} + l\frac{df}{dz}\right)$$
$$+ \frac{1}{1.2}\left(h\frac{df}{dx} + k\frac{df}{dy} + l\frac{df}{dz}\right)^2$$
$$+ \cdots$$
$$+ \frac{1}{1.2\ldots n}\left(h\frac{df}{dx} + k\frac{df}{dy} + l\frac{df}{dz}\right)^n$$
$$+ R$$

$$R = \frac{1}{1.2\ldots(n+1)}\left[h\left(\frac{df}{dx}\right)_{\substack{x+\theta h\\ y+\theta k\\ z+\theta l}} + k\left(\frac{df}{dy}\right)_{\substack{x+\theta h\\ y+\theta k\\ z+\theta l}} + l\left(\frac{df}{dz}\right)_{\substack{x+\theta h\\ y+\theta k\\ z+\theta l}} \right]^{n+1}$$

Le reste de la Série de Maclaurin s'écrit quelquefois sous la forme

$$\frac{\varphi^n(\theta) - \varphi^n(0)}{1.2.3\ldots n}$$

et cette forme n'exige pas que l'on connaisse la dérivée $(n+1)^e$. — Posons

$$\varphi^n(0) = \psi_1(x, y, z)$$

on en déduira évidemment

$$\varphi^n(\theta) = \psi_1(x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l)$$

Remarque.. La série de Maclaurin, sur laquelle on s'est appuyé, exige que $\varphi^n(t)$ soit fini et continu depuis $t=0$ jusqu'à la valeur particulière que nous avons appelé t. on sait qu'alors toutes les autres fonctions de t sont finies et continues dans le même intervalle. Mais comme on a

$$\varphi^n(\theta) = \psi_1(x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l)$$

Il faut que la dérivée $n^{ième}$ soit finie et continue pour toutes les valeurs comprises entre l'état x, y, z et $x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l$. Mais la dérivée totale du n^e ordre se compose des dérivées partielles du même ordre. Donc celles-ci doivent être continues.

Le rapport du reste au terme auquel on s'arrête tend indéfiniment vers zéro si l'on prend h, k, l infiniment petits. En prenant la seconde forme du reste, ce rapport est

$$\frac{\varphi^n(\theta) - \varphi^n(0)}{\varphi^n(0)}$$

ou bien

$$\frac{\psi_1(x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l) - \psi_1(x,y,z)}{\psi_1(x,y,z)}$$

Mais

$$\varphi^n(0) = \psi_1(x,y,z) = \left[\frac{df}{dx}h + \frac{df}{dy}k + \frac{df}{dz}l\right]^n$$

et le terme général de ce développement peut être représenté par

$$A\,h^\alpha k^\beta l^\gamma \qquad (\alpha+\beta+\gamma = n)$$

et le terme qui correspond à celui-ci dans le développement de $\psi_1(x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l)$ sera

$$A' h^\alpha k^\beta l^\gamma$$

Mais si nous posons $k = mh$, $l = ph$, h^n sera facteur commun, et les deux termes deviendront

$$A h^n m^\beta p^\gamma \quad \text{et} \quad A' h^n m^\beta p^\gamma$$

Donc le rapport pourra s'écrire

$$\frac{\Sigma\left[(A'-A)h^n m^\beta p^\gamma\right]}{\Sigma . A h^n m^\beta p^\gamma} = \frac{h^n \Sigma\left[(A'-A) m^\beta p^\gamma\right]}{h^n \Sigma . A m^\beta p^\gamma}$$

Mais A' n'est autre chose que A dans lequel x y et z ont été remplacés par $x+\theta h$, $y+\theta k$ et $z+\theta l$. On peut donc prendre h, k et l assez petits pour que la différence $A'-A$ soit moindre que toute quantité donnée. Si donc on suppose que les rapports α et β conservent néanmoins une valeur finie, tous les termes du numérateur tendront vers zéro, tandis que le dénominateur restera fini. La limite du rapport est donc zéro.

En faisant, dans la série de Taylor, $x=y=z=0$, et

et remplaçant h, k, l par x, y, z, on aura la Série de Maclaurin étendue au cas de plusieurs variables. Nous pourrons l'écrire

$$f(x,y,z) = f(0,0,0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{df}{dy}\right)_0 y + \left(\frac{df}{dz}\right)_0 z + \frac{1}{1.2}\left\{\left(\frac{df}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{df}{dy}\right)_0 y + \left(\frac{df}{dz}\right)_0 z\right\}^2 + \cdots$$

ou bien encore

$$f(x,y,z) = f_0 + df_0 + \frac{d^2 f_0}{1.2} + \cdots$$

et l'on aura

$$R = \frac{1}{1.2\ldots n}\left\{\psi_1(\theta x, \theta y) - \psi_1(0,0)\right\}$$

Maxima et Minima

des Fonctions de Plusieurs Variables.

Proposons-nous de trouver les valeurs de x, y et z qui rendent maxima la fonction $f(x,y,z)$. — Par définition, $f(x,y,z)$ sera un maximum si l'on a

$$f(x+h,\, y+k,\, z+l) - f(x,y,z) < 0$$

pour des valeurs suffisamment petites de h, k et l, quels que soient les signes de ces valeurs. Si au contraire cette différence est positive dans les mêmes circonstances, $f(x,y,z)$ est un minimum.

Supposons donc que pour $x=a$, $y=b$, $z=c$, $f(x,y,z)$ soit un maximum ou un minimum. Si l'on regarde $f(x,b,c)$ comme une fonction d'x, elle devra avoir un maximum correspondant à $x=a$. Si donc on pose $u=f(x,y,z)$, il faudra que pour $x=a$, $y=b$, $z=c$, $\frac{du}{dx}$ soit nul, infini, ou discontinu. Pour la même raison, il devra en être de même de $\frac{du}{dy}$ et $\frac{du}{dz}$. De là il résulte que si l'on suppose (ce qui est le cas le plus ordinaire) que ces trois fonctions soient continues, toutes les valeurs de x, y et z répondant aux maxima et minima de u seront données par les trois équations

$$\frac{du}{dx}=0 \qquad \frac{du}{dy}=0 \qquad \frac{du}{dz}=0$$

En se bornant au cas où ces dérivées sont continues, on peut s'aider de la série de Taylor pour reconnaître les solutions qui répondent à des maxima ou des minima, et celles qui sont à rejeter. Pour cela, on remarque que

$$f(x+h, y+k, z+l) - f(x,y,z) = h\frac{du}{dx} + k\frac{du}{dy} + l\frac{du}{dz} + R$$

et il a été démontré qu'on peut prendre h, k, l assez petits pour que la valeur absolue de la somme des termes qui contiennent h, k et l au premier degré surpasse le reste R. Il suit donc de là que le signe du second membre sera celui de

$$h\frac{du}{dx} + k\frac{du}{dy} + l\frac{du}{dz}$$

et que, si l'on n'avait pas à la fois

$$\frac{du}{dx} = 0 \qquad \frac{du}{dy} = 0 \qquad \frac{du}{dz} = 0$$

$f(x,y,z)$ ne pourrait être ni un maximum ni un minimum, puisqu'en changeant simplement les signes de h, k, l, le signe de $f(x+h, y+k, z+l) - f(x,y,z)$ changerait aussi. On retombe donc sur le résultat déjà obtenu.

On a alors

$$f(x+h, y+k, z+l) - f(x,y,z) = \frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2u}{dx^2}h^2 + \frac{d^2u}{dy^2}k^2 + \frac{d^2u}{dz^2}l^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}hk + 2\frac{d^2u}{dxdz}hl + 2\frac{d^2u}{dydz}kl\right\} + R$$

C'est ce groupe entre parenthèses qui donne son signe, pour des valeurs assez petites de h, k et l. — On peut le représenter par

$$Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + 2Dhk + 2Ehl + 2Fkl$$

Il faut chercher les conditions pour que ce polynôme conserve toujours le même signe pour des valeurs très-petites de h, k et l. — Mais si nous remplaçons h, k, l

par mh, mk, ml, ce polynôme devient

$$m^2\{Ah^2+Bk^2+Cl^2+2Dhk+2Ehl+2Fkl\}$$

et nous voyons que si le polynôme proposé est positif toujours pour de très-petites valeurs de h, k et l, il le sera pour des valeurs quelconques de ces accroissements. Il suffit donc de chercher les conditions pour que ce polynôme reste toujours positif ou toujours négatif pour des valeurs quelconques de h, k et l.

Généralement, on pourra le décomposer en une somme de trois carrés dont l'un contiendra h, k, l, le second h et k, et le 3e. l seulement. — on peut l'écrire en effet

$$A\left\{h^2+2\frac{Dk+El}{A}h\right\}+Bk^2+Cl^2+2Fkl$$

ou bien

$$A\left\{h+\frac{Dk+El}{A}\right\}^2-\frac{D^2k^2}{A}-\frac{E^2l^2}{A}-2\frac{DEkl}{A}+Bk^2+Cl^2+2Fkl$$

ou encore

$$A\left\{h+\frac{Dk+El}{A}\right\}^2+B'k^2+C'l^2+2F'kl$$

en posant pour abréger $B'=B-\frac{D^2}{A}$, $C'=C-\frac{E^2}{A}$, $F'=F-\frac{DE}{A}$

à son tour, le dernier polynôme peut s'écrire

$$A\left\{h+\frac{Dk+El}{A}\right\}^2+B'\left\{k^2+\frac{2F'l}{B'}k\right\}+C'l^2$$

ou bien

$$A\left\{h+\frac{Dk+El}{A}\right\}^2+B'\left\{k+\frac{F'l}{B'}\right\}^2+C''l^2$$

en posant

$$C''=C'-\frac{F'^2}{B'}$$

La décomposition se trouve ainsi effectuée. —

Nous avons supposé ici que A, B' et C'' étaient différents de 0.

Examinons ce qui arriverait si l'une ou l'autre de ces quantités s'annulait.

1°. Soit $A=0$. alors le terme en h^2 disparait, et il peut se présenter deux cas: ou bien D et E sont aussi nuls, de sorte que les termes en h^* s'en vont, ou bien ces termes ne disparaissent pas tous deux. _ Si D et E ne sont pas nuls à la fois, il n'y a ni maximum ni minimum: car le polynome peut se mettre sous la forme $Ph+Q$; et, en donnant à h les valeurs $-\frac{Q}{P}\pm\alpha$, l'ensemble change de signe avec α. _ Si, en même temps que A, D et E sont aussi nuls, le polynome se réduit à

$$Bk^2+CFkl+Cl^2$$

Il pourra se présenter deux cas: ou bien, h étant arbitraire, on fera $k=0$, $l=0$, et, le polynome s'annulant, la discussion portera sur les termes suivants: ou bien on pourra constater que ce terme change de signe pour une autre combinaison de valeurs de h, k, l, et l'on n'aura alors ni maximum ni minimum.

2°. A n'est pas nul. Je le mets en facteur, et je considère le polynome

$$A\left\{h+\frac{Dk+El}{A}\right\}^2+B'k^2+C'l^2+2F'kl$$

on peut avoir $B'=0$, F' n'étant pas nul. alors il n'y a ni maximum ni minimum: car, en posant

$$k=-\frac{C'l}{2F'}\pm\alpha \qquad h=-\frac{Dk+El}{A}$$

le signe du polynome change avec celui de α: il n'y a donc ni max. ni minimum.

Si l'on a en même temps $B'=0$, $F'=0$, le polynome devient

$$A\left\{h+\frac{Dk+El}{A}\right\}^2+C'l^2$$

Si A et C' sont alors de même signe, le terme du 2^d. ordre ne suffit plus pour la discussion : car si l'on fait $h = -\frac{Dk}{A}$, $l = 0$, le polynôme se réduit à zéro quel que soit k. dans les autres cas, le signe est invariable.

Si A et C' ne sont pas de même signe, il n'y a pas de maximum ni de minimum possible : car, pour $l = 0$, le polynôme a le signe de A : pour $h = -\frac{Dk + El}{A}$, il a le signe de C'.

3°. B' peut n'être pas nul. Je prends alors la forme

$$A\left\{h + \frac{Dk + El}{A}\right\}^2 + B'\left\{k + \frac{F'l}{B'}\right\}^2 + C''l^2$$

et je suppose $C'' = 0$. alors A et B' peuvent être de signes contraires, - et il n'y a ni maximum ni minimum ; ou bien ils sont de même signe, et les termes du second ordre ne suffisent plus pour la discussion.

Considérons maintenant le cas où A', B', C'' ne sont tous trois différents de zéro. La condition pour qu'il y ait maximum ou minimum est que tous trois soient de même signe. S'ils sont en effet tous trois positifs ou négatifs, on ne peut annuler à la fois les trois carrés sans supposer $l = 0$, $k = 0$, $h = 0$: ce qui serait supposer que la fonction u ne varie pas.

Si au contraire ils sont de signes différents, il n'y aura ni maximum ni minimum. Car soit par ex. $A > 0$, $B' < 0$, $C'' > 0$, on pourra disposer de k de manière à faire disparaître le coefficient de B', ou bien de l et h de façon que le terme négatif reste seul. on pourra donc à volonté faire varier le signe du polynôme : il ne peut donc y avoir

ni maximum ni minimum.

ainsi, les conditions du Maximum seront

$$A < 0 \qquad B' < 0 \qquad C'' < 0$$

$$B' = B - \frac{D^2}{A}$$

$$C'' = C' - \frac{F'^2}{B'} = C - \frac{E^2}{A} - \frac{\left(F - \frac{DE}{A}\right)^2}{B - \frac{D^2}{A}}$$

et celles du Minimum

$$A > 0 \qquad B' > 0 \qquad C'' > 0$$

et, en remplaçant B' et C'' par leurs valeurs

Maximum:

$$A < 0$$

$$D^2 - AB > 0$$

$$(AF - DE)^2 - (E^2 - AC)(D^2 - AB) > 0$$

Minimum

$$A > 0$$

$$D^2 - AB < 0$$

$$(AF - DE)^2 - (E^2 - AC)(D^2 - AB) < 0$$

lisez < là où il y a barbouillage. car A < 0 pour le maximum.

observons que $A = \frac{d^2 f}{dx^2}$, et que j'aurais pu aussi bien mettre en avant B ou E que A, de sorte qu'on doit avoir aussi $\frac{d^2 f}{dy^2} < 0$ et $\frac{d^2 f}{dz^2} < 0$, conditions souvent utiles.

S'il s'agissait d'une fonction de deux variables seulement, $f(x, y)$, il faudrait dans les résultats précédents supprimer l, C, E, F. La dernière condition disparaît, et les deux premières se réduisent à

$A < 0 \quad D^2 - AB < 0$ pour le Maximum

et

$A > 0 \quad D^2 - AB < 0$ " Minimum.

on peut arriver à ces résultats par une autre méthode, très sim-ple dans le cas de deux variables.

Dans ce cas, les termes du 2e. ordre peuvent s'écrire ainsi

$$h^2 \left\{ A + B\left(\frac{k}{h}\right)^2 + 2D\frac{k}{h} \right\}$$

Pour que ce polynôme garde constamment le même signe, il faut que le trinôme entre parenthèses soit le produit de deux facteurs imaginaires, en y considérant $\frac{k}{h}$ comme la variable: ce qui reproduit la condition

$$D^2 - AB < 0$$

Nous aurons un maximum si $B < 0$, un minimum dans le cas contraire. D'ailleurs la condition $D^2 - AB < 0$ fait voir que A et B sont de même signe: car le produit AB doit évident. être positif.

Problème. – Partager un nombre a en trois parties telles que

$$f(x,y) = x^m y^n (a-x-y)^p$$

soit maximum ou minimum. on n'admettra que les valeurs arithmétiques différentes de zéro.

Il faudra poser

$$\frac{df}{dx} = 0 \qquad \frac{df}{dy} = 0$$

ce qui donne

$$\begin{cases} m x^{m-1} y^n (a-x-y)^p - p x^m y^n (a-x-y)^{p-1} = 0 \\ n x^m y^{n-1} (a-x-y)^p - p x^m y^n (a-x-y)^{p-1} = 0 \end{cases}$$

et comme nous n'admettons pas les solutions nulles, nous pouvons supprimer dans la 1ère Eq. le facteur $x^{m-1} y^n (a-x-y)^{p-1}$ et dans la 2e, $x^m y^{n-1} (a-x-y)^{p-1}$. donc

$$\begin{cases} m(a-x-y) - px = 0 \\ n(a-x-y) - py = 0 \end{cases}$$

d'où

$$x = \frac{ma}{m+n+p} \qquad y = \frac{na}{m+n+p} \qquad z = a-x-y = \frac{pa}{m+n+p}$$

ce qui montre qu'on aura la solution en divisant a en 3 parties proportionnelles à m, n, p.

Pour vérifier que cette solution donne un maximum, il faut calculer

$$A = \frac{d^2f}{dx^2} \qquad D = \frac{d^2f}{dx\,dy} \qquad B = \frac{d^2f}{dy^2}$$

et voir si les conditions trouvées plus haut sont satisfaites. — Il est facile de voir que les 3 dérivées partielles contiendront le facteur $x^{m-1} y^{n-1} (a-x-y)^{p-2}$, que je puis supprimer, puisqu'il est positif. J'aurai alors pour $\frac{d^2f}{dx^2}$

$$-(m+p)x \left\{ mnp \left(\frac{a}{m+n+p} \right)^{m+n+p-2} \right\}$$

à cause de la symétrie du facteur compris entre les accolades, on reconnaît qu'il se répétera dans les deux autres dérivées. Il est d'ailleurs positif. Donc nous conserverons

pour $\frac{d^2f}{dx^2}$: $-n(m+p)$ pour $\frac{d^2f}{dy^2}$: $-m(n+p)$ pour $\frac{d^2f}{dx\,dy}$: $-mn$

Ces 3 quantités sont <0. — on devra avoir en outre

$$m^2n^2 - mn(m+p)(n+p) < 0$$

$$mn < (m+p)(n+p)$$

$$0 < p^2 + p(m+n)$$

$$m+n+p > 0$$

condition qui est évidemment remplie.

Maxima et Minima

d'une fonction implicite de plusieurs variables indépendantes.

Proposons-nous de chercher les maxima et minima d'une fonction

$$F(x, y, z, \ldots u)$$

de $n+p$ variables, sachant qu'entre ces variables il y a n relations exprimées par les équations

$$(A) \quad \begin{cases} \varphi_1(x, y, z \ldots u) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z \ldots u) = 0 \\ \ldots \\ \varphi_n(x, y, z \ldots u) = 0 \end{cases}$$

Ces n équations détermineront n de nos variables en fonction des p autres, lesquelles seules seront indépendantes.

Cela posé, les valeurs des variables qui rendent F un maximum ou un minimum doivent annuler la différentielle totale de F, de sorte que, quelles que soient les variables qu'on regardera comme indépendantes, on devra avoir:

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz + \cdots + \frac{dF}{du}du = 0$$

et si l'on convient de regarder les p premières variables x, y, z.. comme indépendantes, les p premières quantités dx, dy, dz.. seront des accroissements arbitraires; les n dernières quantités telles que du seront les différentielles des n variables dépendantes considérées comme fonction des p premières. Et ces quantités du.. seront déterminées par les éq. suivantes, obtenues en différentiant les n relations (A)

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d\varphi_1}{dx}dx + \frac{d\varphi_1}{dy}dy + \frac{d\varphi_1}{dz}dz + \cdots\cdots + \frac{d\varphi_1}{du}du = 0 \\ \frac{d\varphi_2}{dx}dx + \frac{d\varphi_2}{dy}dy + \frac{d\varphi_2}{dz}dz + \cdots\cdots + \frac{d\varphi_2}{du}du = 0 \\ \vdots \\ \frac{d\varphi_n}{dx}dx + \frac{d\varphi_n}{dy}dy + \frac{d\varphi_n}{dz}dz + \cdots\cdots + \frac{d\varphi_n}{du}du = 0 \end{array}\right.$$

Nous avons ainsi en tout $n+1$ équations, entre lesquelles éliminant les n différentielles telles que du, nous arriverons à une éq. unique entre les p accroissements arbitraires $dx, dy, dz \ldots dv$, laquelle sera de la forme

$$P_1 dx + P_2 dy + P_3 dz + \cdots + P_p dv = 0$$

et comme les accroissements dx, dy.. dv doivent rester arbitraires, nous devrons poser

$$P_1 = 0 \quad P_2 = 0 \quad P_3 = 0 \quad \cdots\cdots \quad P_p = 0$$

et ces équations, jointes aux n relations (A), serviront à déterminer les $n+p$ variables.

L'élimination des différentielles totales telles que du peut se faire par la méthode des indéterminées : il suffira de multiplier la 1re de nos équations par différentielles par 1, la 2e par λ, la 3e par μ, et ainsi de suite, et d'ajouter. Puis, on profitera de l'indétermination de λ, μ, ν.. pour égaler à zéro les coefficients des différentielles totales du.. on aura ainsi n équations qui feront connaître les valeurs des n multiplicateurs. On reportera ces valeurs dans les coefficients de $dx, dy, dz, .. dv$, qu'on égalera ensuite à zéro. — Mais cela revient évidemment à égaler de suite à zéro tous les coefficients de $dx, dy, .. du$, ce qui donne les $n+p$ éq.

$$(B).\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dF}{dx} + \dfrac{d\varphi_1}{dx}\lambda + \cdots + \dfrac{d\varphi_n}{dx}\rho = 0 \\ \dfrac{dF}{dy} + \dfrac{d\varphi_1}{dy}\lambda + \cdots + \dfrac{d\varphi_n}{dy}\rho = 0 \\ \cdots \\ \dfrac{dF}{du} + \dfrac{d\varphi_1}{du}\lambda + \cdots + \dfrac{d\varphi_n}{du}\rho = 0 \end{array}\right.$$

qui, ajoutées aux n équations (A), serviront à déterminer les $2n+p$ inconnues $x, y, z \ldots u$, $\lambda, \mu, \nu .. \rho$.

Cette méthode nous montre qu'il est indifférent d'éliminer entre $n+1$ équations différentielles les différentielles totales telles que du plutôt que les accroissements arbitraires. Car elle fait voir que, quelles que soient les quantités que l'on éliminera, les éq. résultantes seront toujours les mêmes, ce qu'on pouvait prévoir : car si $dx, dy, dz, .. dv$ sont arbitraires, du.. le sont aussi comme

dépendant de $dx, dy .. dv$.

Pour savoir si les valeurs qu'on vient de déterminer pour les inconnues fournissent des maxima ou des minima, il faut avoir recours aux termes de 2e. dimension. Mais nous ne poursuivrons pas ces calculs, qui deviennent de plus en plus compliqués.

Les maxima et les minima que l'on déterminera de cette manière pour $F(x, y, z, \dots u)$ ne seront pas des Max. ou Min. absolus, car les inconnues sont assujetties à satisfaire à n relations. Ce seront des Max. ou des Min. relatifs.

On peut remarquer encore que si l'on avait voulu chercher les Maxima ou Minima de $\varphi_1(x, y, z, \dots u)$ par exemple, et si à $\varphi_2 = 0, \dots \varphi_n = 0$ on joignait la condition $F = 0$, on serait conduit absolument aux mêmes Eq. différentielles : mais les valeurs de $x, y, z, \dots u$ ne seraient plus les mêmes : car au lieu du système A, on a maintenant celui-ci :

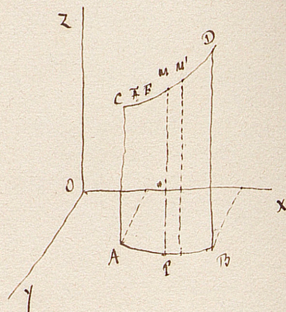
$$\varphi_1 = 0 \quad \varphi_2 = 0 \quad \dots \quad \varphi_n = 0 \quad F = 0$$

Enfin, si l'on suppose que $\lambda, \mu, \nu, \dots \rho$ ont les valeurs que nous leur avons trouvées plus haut, et si l'on cherchait les Maxima ou Minima absolus de la fonction

$$F + \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 + \nu\varphi_3 + \dots + \rho\varphi_n$$

il faudrait égaler à zéro les dérivées partielles relatives à chacune des variables : ce qui reproduirait encore les équations (B).

Différentielle de l'arc à double courbure.



Soit un arc quelconque CMD d'une courbe dans l'espace. Prenons d'une manière arbitraire et en nombre quelconque des points E, F, .. M, M'.. sur cette courbe, et considérons la portion de polygone gauche CEF..MM'..D inscrite dans l'arc CD. Je dis que ce périmètre a une limite déterminée lorsque ses sommets se rapprochent tous indéfiniment les uns des autres, en même temps que leur nombre augmente jusqu'à l'infini; après l'avoir démontré, nous conviendrons de prendre cette limite pour la longueur de l'arc CD.

Soient donc x, y, z les coordonnées d'un des sommets M, et $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ celles du sommet suivant M'. on a

$$MM' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}$$

d'où, en appelant P le périmètre du polygone

$$P = \Sigma . \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}$$

Si l'on suppose que Δx décroisse jusqu'à zéro, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ tendront vers $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$; en sorte que l'on peut écrire

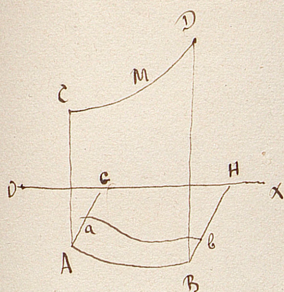
$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \alpha$$

α s'annulant avec Δx, et

$$P = \Sigma . \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \Sigma . \alpha \Delta x$$

Démontrons que chacun des termes dont se compose la valeur de P a une limite fixe. D'abord, $\Sigma\,\alpha\,\Delta x$ tend vers zéro, soit en effet ε la plus grande des valeurs de α lorsque x passe d'une manière continue de $x = OG$ à $x = OH$. Nous aurons

$$\Sigma.\,\alpha\Delta x < \Sigma.\,\varepsilon\,\Delta x < \varepsilon\,\Sigma\,\Delta x$$



$\Sigma\,\Delta x = GH$. Donc $\varepsilon.\Sigma\Delta x$ tend vers zéro.

Considérons maintenant la quantité

$$\Sigma\,\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

et regardons x comme la variable indépendante, de sorte que cette quantité est une fonction d'x; posons-la égale à Y, et soit Y l'ordonnée d'une courbe plane ab. on aura

$$\Sigma.\,\Delta x.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \Sigma\,Y\Delta x$$

or à la limite, $\Sigma\,Y\Delta x$ n'est autre chose que l'aire plane $GabH$. Donc $\text{Lim}.\,P = \text{Lim}.\,\Sigma\,Y\Delta x = \text{aire } GabH$. C'est cette quantité qui est la même que l'arc $CMD = s$. D'où il suit encore que

$$ds = d\,(\text{aire } GabH) = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

On conclut facilement delà que la limite du rapport de la corde MM' à l'arc qu'elle soutend est l'unité. En effet, quel que soit l'arc, on a

$$\frac{\text{Corde } MM'}{\text{arc } MM'} = \frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}{\Delta s} = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}}{\frac{\Delta s}{\Delta x}}$$

dont la limite est 1.

Tangentes aux Courbes à double Courbure.

Cherchons les Eq. de la Tangente en un point $x'\,y'\,z'$ d'une courbe donnée par les Eq.

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0 & (1) \\ \varphi(x,y,z)=0 & (2) \end{cases}$$

Cherchons pour cela les projections de la courbe sur les plans des xy et des xz. Pour obtenir la 1re il suffit d'éliminer z entre les deux Eq. (1) et (2) ; l'Eq. ainsi obtenue sera l'Eq. du Cylindre projetant cette courbe sur le plan xoy, et par conséquent l'Eq. de la projection de la courbe sur ce plan. De même en éliminant y entre (1) et (2), on obtient l'Eq. de la projection de la courbe sur le plan des xz.

Maintenant, soient $\psi(x,y)=0$ et $\pi(x,z)=0$ ces projections. La Tangente à la 1re au point $x'y'$ sera

$$Y-y'=\frac{dy'}{dx'}(X-x') \qquad (3)$$

et la tangente à la 2e au point $x'z'$ sera

$$Z-z'=\frac{dz'}{dx'}(X-x') \qquad (4)$$

Telles sont donc les Eq. de la Tangente à la courbe au point $x'\,y'\,z'$. Il ne reste plus qu'à déterminer $\frac{dy'}{dx'}$ et $\frac{dz'}{dx'}$ au moyen des Eq. (1) et (2). En les différentiant après avoir remplacé x,y,z par x',y',z', on a

$$\begin{cases} \frac{df}{dx'}+\frac{df}{dy'}\frac{dy'}{dx'}+\frac{df}{dz'}\frac{dz'}{dx'}=0 & (a) \\ \frac{d\varphi}{dx'}+\frac{d\varphi}{dy'}\frac{dy'}{dx'}+\frac{d\varphi}{dz'}\frac{dz'}{dx'}=0 & (b) \end{cases}$$

on pourra de ces deux équations tirer les valeurs des coeffi-
-cients différentiels en question, et les transporter dans (3) et (4) :
ce qui revient à éliminer $\frac{dy'}{dx'}$ et $\frac{dz'}{dx'}$ entre (3) (4) (a) et (b).
on obtient, au moyen de (3) et (4)

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{Y-y'}{X-x'} \qquad \frac{dz'}{dx'} = \frac{Z-z'}{X-x'}$$

Reportant :

$$\begin{cases} \frac{df}{dx'}(X-x') + \frac{df}{dy'}(Y-y') + \frac{df}{dz'}(Z-z') = 0 \\ \frac{d\varphi}{dx'}(X-x') + \frac{d\varphi}{dy'}(Y-y') + \frac{d\varphi}{dz'}(Z-z') = 0 \end{cases}$$

on remarque que pour obtenir immédiatement ces Eq. de la tangente, on peut former les différentielles totales des premiers membres des Eq. (1) et (2), et les égaler à zéro, après y avoir remplacé les différentielles dx, dy, dz par les différences $X-x$, $Y-y$, $Z-z$.

Angle de Torsion.

On appelle angle de torsion ou de seconde courbure l'angle de deux plans osculateurs consécutifs. — Il est utile de remarquer l'indépendance des deux courbures l'une par rapport à l'autre, de sorte que l'angle de contingence étant donné, celui de torsion peut être quelconque et même nul : mais l'angle de contingence ne peut être nul sans que l'angle de torsion ne soit nul par cela même.

Pour déterminer l'angle de deux plans osculateurs aux points M et M' d'une courbe, au point M nous élèverons deux perp. à ces plans : leur angle sera l'angle cherché. Dès lors la marche à suivre est la même que pour l'angle de contingence. Sans répéter les raisonnements faits alors, nous arriverons à l'égalité

$$\varphi = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}$$

λ, μ, ν sont donc les angles des axes avec la perp. au plan osculateur.

L'Eq. du plan osculateur étant

$$A(x'-x) + B(y'-y) + C(z'-z) = 0$$

nous aurons

$$\cos\lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad \cos\mu = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad \cos\nu = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Nous pouvons encore pour simplifier les calculs de la substitution, observer que pour l'angle de contingence nous avions

$$\varepsilon = \sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}$$

et qu'on est arrivé à

$$\varepsilon = \frac{1}{ds^2}\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}$$

Dans le cas actuel, $\frac{dx}{ds}$ $\frac{dy}{ds}$ $\frac{dz}{ds}$ sont remplacés par $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, ou bien par $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$ en posant $D = \sqrt{A^2+B^2+C^2}$

Donc nous aurons

$$\varphi = \frac{1}{D^2}\sqrt{(B\,dC - C\,dB)^2 + (C\,dA - A\,dC)^2 + (A\,dB - B\,dA)^2}$$

Cherchons maintenant la valeur de chacun des binômes

$$B = dz\,d^2x - dx\,d^2z \qquad dB = dz\,d^3x - dx\,d^3z$$

$$C = dx\,d^2y - dy\,d^2x \qquad dC = dx\,d^3y - dy\,d^3x$$

D'où

$$\frac{B\,dC - C\,dB}{dx} = dx\,(d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y) + dy\,(d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z) + dz\,(d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x)$$

valeur symétrique. Donc

$$\frac{B\,dC - C\,dB}{dx} = \frac{A\,dB - B\,dA}{dz} = \frac{C\,dA - A\,dC}{dy}$$

Donc chacun de ces rapports est égal à

$$\frac{\sqrt{(B\,dC - C\,dB)^2 + (C\,dA - A\,dC)^2 + (A\,dB - B\,dA)^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

Mais cette quantité est égale à $\frac{\varphi D^2}{ds}$. Donc

$$\varphi = ds\,\frac{dx\,(d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y) + dy\,(d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z) + dz\,(d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x)}{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}$$

Remarques Diverses sur les Courbes Gauches.

Une courbe à double courbure peut, comme une courbe plane, présenter des points singuliers : il peut arriver par exemple que trois éléments consécutifs soient dans un même plan. — Pour déterminer un tel point, on égalera à zéro l'angle de torsion, en y prenant x pour variable indépendante : ce qui donnera, en divisant par dx^5 pour avoir une Eq. à termes finis

$$\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{d^2z}{dx^2}\,\frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

à cette Eq. de condition on associera les Eq. de la courbe, et l'on aura ainsi trois Eq. pour déterminer les coordonnées x, y, z du point singulier cherché.

Pour que la courbe soit tout entière dans un même plan, il faut que l'angle de torsion soit nul quelque valeur qu'on donne à x, y et z étant remplacés par leurs valeurs en fonction d'x déduites des Eq. de la courbe. — Cette condition est toujours vérifiée pour les courbes planes : car on peut les représenter par l'intersection d'un plan $z = ax + by$ et d'une surface $f(x, y, z) = 0$. or, si nous différentions la 1ère Equation

$$\frac{dz}{dx} = a + b\,\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = b\,\frac{d^2y}{dx^2} \quad \frac{d^3z}{dx^3} = b\,\frac{d^3y}{dx^3}$$

Par conséquent, la quantité $d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y$ devient

$$b\,d^3y\,d^2y - b\,d^2y\,d^3y$$

quantité identiquement nulle.

Si l'angle de contingence est nul pour tous les points d'une courbe, tous les côtés du polygone infinitésimal inscrit dans cette ligne sont dans le prolongement l'un de l'autre, et par conséquent cette ligne est droite. — La condition pour qu'une ligne soit droite peut donc s'exprimer par l'éq. différentielle

$$(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 = 0$$

laquelle devra être vérifiée quels que soient x, y et z. ou bien, en prenant x pour variable indépendante, et divisant par d^3x,

$$\left(\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$$

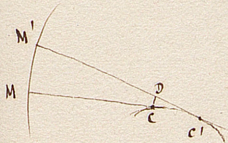
ou bien

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 0 \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

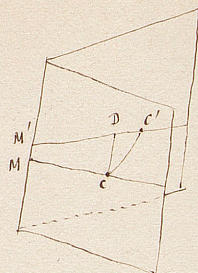
Il est facile de voir que ces conditions sont toujours vérifiées pour une ligne droite, dont les éq. sont

$$\begin{cases} y = bx + \beta \\ z = cx + \gamma \end{cases}$$

Le lieu des centres des cercles osculateurs d'une courbe à double courbure n'est pas une développée de cette courbe : car les normales à la courbe ne sont pas tangentes à ce lieu. — En effet, si les normales étaient tangentes, la distance CD de deux normales consécutives devrait être un infiniment petit du second ordre. Or je vais démontrer qu'il n'en est pas ainsi. — Soient en



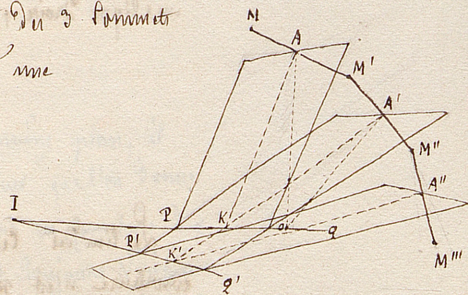
effet les deux plans osculateurs en deux points voisins : les deux centres de courbure sont contenus dans ces plans, ainsi que les deux normales. Donc la distance CD du centre C à la normale M'C' est au moins égale à la perp. abaissée de C sur le second plan. Mais cette perp. est un infiniment petit de même ordre que l'angle φ des deux plans, et par conséquent du 1er. ordre en général. Donc CD est aussi un infinimt. petit du 1er. ordre.



En général, les normales successives à une courbe gauche ne se rencontrent pas. Cependant, une telle courbe a une infinité de développées. C'est ce que nous allons voir.

Surface Polaire. — Développées.

Supposons inscrit dans une courbe à double courbure un polygone gauche MM'M''M'''.. Par le milieu A de MM' menons un plan perp. à ce côté, et faisons de même aux milieux des côtés successifs. Les deux premiers plans se coupent suivant une droite PQ qui est le lieu des points également distants des 3 sommets M, M', M''. Les 2e et 3e. plans se coupent suivant une droite P'Q', et ainsi de suite. L'ensemble des droites ainsi déterminées définit une surface polyédrale composée d'une suite d'éléments plans indéfinis : cette surface est développable : car, en faisant tourner convenablement chacun des éléments autour d'une des droites qui le déterminent, de manière à le ramener dans le plan de l'élément précédent, on rabattra la surface tout entière sur le plan du premier élément sans déchirure ni duplicature. — Passons main.



-tenant à la limite. Le polygone deviendra la courbe donnée: chaque droite PQ sera le lieu des pôles du cercle osculateur en chaque point M de la courbe, et la surface limite de ces droites sera la Surface polaire, développable comme le polyèdre dont elle est la limite.

Les lignes PQ, P'Q' se coupent en un point I: car elles sont toutes deux dans un même plan, celui qui passe par A'. Le lieu des intersections successives de ces droites, ou le lieu des points I, est à la limite l'arête de rebroussement de la Surface polaire. D'ailleurs le point I est le point également distant des 4 sommets M, M', M'', M''': à la limite, il est le centre de la Sphère osculatrice: l'arête de rebroussement de la surface polaire est donc le lieu des centres des Sphères osculatrices à la courbe donnée.

Cette Surface polaire renferme une infinité de développées de la courbe. Par A, je mène dans le plan APQ une droite quelconque AK; par A' et K, je mène une seconde droite qui rencontre P'Q' en K'; je joins de même A''K', etc. — J'observe d'abord que AK et A'K sont également inclinées sur PQ: en effet, de A je abaisse AO perp. sur PQ, et je joins A'O. Ces deux droites sont dans un même plan perp. à PQ. Or les triangles AKO et A'KO sont égaux (rectangles en O, KO commun, AO=A'O) donc l'angle AKO=A'KO. Maintenant, l'ensemble des points K, K'.. détermine une polygone qui à la limite devient une courbe dont les droites AK, A'K' sont des tangentes. Cette courbe est une développée. En effet sur le contour polygonal KK'K''.. appliquons un fil dont l'extré-mité libre aboutisse en A. Si nous développons ce fil de manière à lui faire prendre la direction K'A', son extrémité viendra en A': en effet, AK=A'K, et l'inclinaison de ces deux droites sur PQ est la

même ; en sorte que le fil passera successivement par tous les milieux A, A', A''... donc, à la limite, il décrira la courbe MM'M''.

Le point K étant arbitraire, on voit qu'il existe une infinité de développées de la courbe donnée.

S'il s'agissait d'une courbe plane, la surface polaire serait un prisme, et à la limite, une surface cylindrique, sur laquelle on pourra encore trouver une infinité de développées.

Ces développées jouissent d'une propriété remarquable ; c'est que, lorsque la surface polaire est développée sur un plan, elles deviennent toutes des lignes droites. Car, si nous considérons d'abord la surface polyédrale et les polygones inscrits dans les développées, il résulte de ce que les droites Rq, R AK, A'K sont également inclinées sur RQ, que ces deux droites s'appliqueront l'une sur l'autre quand le plan A'RQ s'appliquera sur ARQ. — Cette propriété est encore vraie à la limite. On peut donc dire que sur la surface polaire, le plus court chemin entre deux points est l'arc de développée qui passe par ces deux points.

Dans le cas particulier d'une courbe plane, toutes les développées sont des hélices : car les génératrices de la surface polaire étant toutes parallèles, les tangentes à la développée sont inclinées sur elles d'un angle constant. Dans le développement de la surface, les hélices deviendront des droites : donc le plus court chemin entre deux points sur la surface du cylindre est l'arc d'hélice qui les joint. — On voit aussi que, parmi cette infinité de développées d'une courbe plane, une seule est plane, et c'est celle que nous avons considérée déjà comme la développée proprement dite.

Reste à appliquer le calcul à la recherche des lignes et des surfaces dont nous venons de parler.

1°. Droite Polaire. — Cette droite est l'intersection de deux plans normaux consécutifs. Le premier a pour équation

$$(1) \qquad (x'-x)\,dx + (y'-y)\,dy + (z'-z)\,dz = 0$$

et ceci peut être considéré comme une des éq. de la droite. Je la représenterai par $F = 0$. Soient $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ les coordonnées du point voisin. Pour avoir l'éq. du plan normal en ce point, il faudra faire ces changements dans $F=0$; ce qui donnera

$$F + dF + \frac{d^2F}{1.2} + \dots = 0$$

Mais si l'on considère cette éq. comme la 2ᵉ éq. de la droite polaire, elle se simplifiera en vertu de la 1ʳᵉ, et en outre, d^2F étant nul à la limite vis-à-vis de dF, il restera

$$dF = 0$$

ou bien

$$(2) \qquad (x'-x)\,d^2x + (y'-y)\,d^2y + (z'-z)\,d^2z - ds^2 = 0$$

2°. Surface Polaire. — Cette surface étant le lieu de la droite que je viens de déterminer, il suffira pour l'obtenir d'éliminer x, y, z entre les éq. (1) et (2) et celles de la courbe.

3°. Centre de la Sphère osculatrice. — Il est déterminé par l'intersection d'une 1ʳᵉ droite polaire dont les éq. sont (1) et (2), avec la droite polaire infiniment voisine. Pour obtenir cette dernière, il faut dans (1) et (2) changer x en $x+dx$, y en $y+dy$, z en $z+dz$; ce qui donnera

$$(3) \qquad F + dF + \frac{d^2F}{1.2} + \dots = 0$$

$$(4) \qquad dF + \frac{d^2F}{1.2} + \frac{d^3F}{1.2.3} + \dots = 0$$

Mais si nous considérons simultanément les 4 éq. (1) (2) (3) (4) comme déterminant les coordonnées du point cherché, alors les deux dernières deviennent

$$dF = 0 \qquad d^2F = 0$$

de sorte que nous avons pour déterminer les coordonnées x, y, z du point cherché, les 3 Eq.

$$F = 0 \qquad dF = 0 \qquad d^2F = 0$$

ou bien

$$(x'-x)\,dx + (y'-y)\,dy + (z'-z)\,dz = 0$$

$$(x'-x)\,d^2x + (y'-y)\,d^2y + (z'-z)\,d^2z = ds^2$$

$$(x'-x)\,d^3x + (y'-y)\,d^3y + (z'-z)\,d^3z = 3\,ds\,d^2s$$

4°. arête de Rebroussement de la Surface Polaire. — Cette arête étant le lieu des centres des Sphères osculatrices, il suffira pour l'obtenir d'éliminer x, y, z entre les deux Eq. de la courbe et les trois que nous venons de trouver : d'où résulteront les deux Eq. de la courbe cherchée.

Hélice.

L'Hélice est le lieu des points de la surface du cylindre tels que leur hauteur au dessus du cercle de base est dans un rapport constant avec la longueur de l'arc de ce cercle compris entre le pied de cette hauteur et une origine fixe, qui est le point où l'hélice rencontre le cercle de base.

Prenons le plan de base pour plan des xy, pour axe des x le diamètre passant à l'origine A, et pour axe des z l'axe même du cylindre : et soit M un point de l'hélice. Pour déterminer ses coordonnées OP, BP et MB, je prends pour inconnue auxiliaire l'angle $BOA = u$, et je désigne par R le rayon de base du cylindre. Nous aurons d'abord

$$y = R \sin u \qquad x = R \cos u$$

Puis, d'après la définition de l'hélice,

$$MB = m. \text{arc } AB$$

m étant la constante dont j'ai parlé, et qui a pour valeur $\frac{h}{2\pi R}$. Or l'arc $AB = Ru$. Donc

$$z = mRu.$$

Ces trois Eq. sont celles des projections de l'hélice sur les 3 plans coordonnés. On peut éliminer u successivement entre deux de ces Eq. Mais il vaut mieux conserver cette indéterminée.

1°. Angles de la tangente avec les axes. — Nous savons que ces 3 angles α, β, γ ont pour valeurs générales

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds} \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}$$

Or nous avons

$$dx = -R \sin u\, du \qquad dy = R \cos u\, du \qquad dz = mR\, du$$

$$ds = R\, du \sqrt{1+m^2}$$

Donc

$$\cos\alpha = -\frac{\sin u}{\sqrt{1+m^2}} \qquad \cos\beta = \frac{\cos u}{\sqrt{1+m^2}} \qquad \cos\gamma = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

Or la valeur de $\cos\gamma$ est celle du sinus de l'angle dont la tangente est m. Si donc nous menons la tangente et la sous-tangente, l'angle MTB de ces deux droites est constant, et a pour tangente m : propriété connue de l'hélice, qu'on exprime ordinairement en disant que la tangente fait un

angle constant avec la Génératrice du cylindre qui passe au point de contact.
On peut encore conclure delà que la courbe est gauche. Considérons en effet le prisme et le polygone tracé sur ce prisme dont le cylindre et l'hélice sont les limites: trois éléments consécutifs ne sont pas dans un même plan: car si nous transportons ces 3 éléments parallèlement à eux-mêmes en un même point d'une Génératrice, comme tous trois sont également inclinés sur la Génératrice, il s'ensuit qu'ils ne peuvent être dans un même plan.

Si nous calculons la distance BT, au moyen du triangle rectangle MBT, nous trouvons

$$BT = \frac{z}{m} = Ru = \text{arc } BA.$$

D'où il suit que le lieu des points M est la développante du cercle de base. Delà encore une nouvelle Génération de l'hélice. — Soit MTB un angle indéfini quelconque; si nous plaçons son sommet en A, et si nous l'enroulons sur le cylindre de manière à appliquer BT sur le cercle de base, la droite MT deviendra une hélice.

2°. Plan normal. — Son Eq. générale étant

$$(x'-x)dx + (y'-y)dy + (z'-z)dz = 0$$

nous aurons, en y substituant les valeurs des différentielles, et divisant par Rdu,

$$-(x'-x)\sin u + (y'-y)\cos u + m(z'-z) = 0$$

Puis observant que $x\sin u = y\cos u$,

$$x'\sin u - y'\cos u - m(z'-z) = 0$$

3°. Plan osculateur. — On a en général pour son Eq.

$$(x'-x)(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + (y'-y)(dz\,d^2x - dx\,d^2z) + (z'-z)(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0$$

Prenons les différentielles secondes

$$d^2x = -R\cos u\,du^2 \quad d^2y = -R\sin u\,du^2 \quad d^2z = 0$$

Substituant et réduisant, on a

$$mx'\sin u - my'\cos u + z'-z = 0$$

Quelle est l'inclinaison de ce plan sur le plan de base? Cet angle est celui d'une normale au plan avec l'axe des z: il est donc donné par l'Eq.

$$\cos\omega = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} = \cos.\ \text{arc}\ \text{tg}\ m$$

4°. Rayon de Courbure. — Nous savons d'abord que cette droite est située dans le plan osculateur. Pour trouver sa direction, nous allons chercher les cos. de ses angles avec les axes par les formules

$$\cos\lambda = \frac{d\frac{dx}{ds}}{\varepsilon} \qquad \cos\mu = \frac{d\frac{dy}{ds}}{\varepsilon} \qquad \cos\nu = \frac{d\frac{dz}{ds}}{\varepsilon}.$$

Cherchons d'abord ε. or on a en général

$$\varepsilon = \frac{1}{ds}\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}$$

observant qu'ici $d^2z = d^2s = 0$, et remplaçant dx et dy par leurs valeurs, ainsi que ds, on aura

$$\varepsilon = \frac{du}{\sqrt{1+m^2}} = \text{Constante}.$$

Par suite, comme $d\frac{dx}{ds} = -\frac{\cos u}{\sqrt{1+m^2}}$ et $d\frac{dy}{ds} = -\frac{\sin u}{\sqrt{1+m^2}}$, on a

$$\cos\lambda = -\cos u \qquad \cos\mu = -\sin u \qquad \cos\nu = 0$$

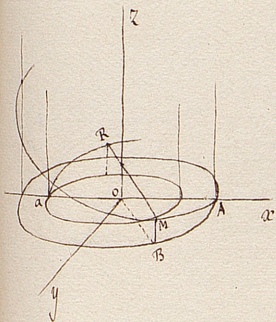
Delà on conclut 1°. que le rayon de courbure est parallèle au plan de base; 2°. que ce rayon rencontre l'axe des z: car il fait avec les plans des xz et des yz des angles égaux à ceux que fait avec eux la droite OB; et si les sinus et cosinus de ces angles portent le signe −, c'est que les formules donnent les angles que fait avec ces plans le rayon de courbure allant de M en R. – La longueur du rayon de courbure est donnée par la formule

$$\rho = \frac{ds}{\varepsilon}$$

sa valeur est donc

$$\rho = R(1+m^2)$$

c.à.d. qu'il surpasse le rayon de base du cylindre d'une quantité constante Rm^2. Par conséquent l'extrémité R de ce rayon décrit une hélice sur cylindre ayant même axe que le 1er, et dont le rayon de base est Rm^2. Car la hauteur du point M au-dessus du plan de base est la même que celle du point R; et comme les arcs de cercle semblables sont entre eux comme leurs rayons, le rapport de cette hauteur à l'arc de cercle compté à partir de l'origine a de cette seconde hélice est constant.



Le rayon de courbure, en se mouvant, engendre une surface qui a reçu le nom d'Hélicoïde Gauche. Cette surface est, comme nous le verrons, un Conoïde: car elle est engendrée par une droite qui se meut en restant parallèle à un plan fixe, et s'appuyant sur une droite et une courbe fixes.

5°. angle de Torsion. – Nous avons trouvé pour valeur générale de cet angle

$$\eta = ds\,\frac{dx(d^2yd^3z - d^2zd^3y) + dy(d^2zd^3x - d^2xd^3z) + dz(d^2xd^3y - d^2yd^3x)}{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}$$

J'observe que

$dx = -R\sin u\,du$	$d^2x = -R\cos u\,du^2$	$d^3x = R\sin u\,du^3$	$ds = R\sqrt{1+m^2}\,du$
$dy = R\cos u\,du$	$d^2y = -R\sin u\,du^2$	$d^3y = -R\cos u\,du^3$	
$dz = mR\,du$	$d^2z = 0$	$d^3z = 0$	

Substituant et simplifiant, on a

$$q = \frac{m\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}du = \frac{m\,du}{\sqrt{1+m^2}} = m\,\varepsilon = \text{Const}.$$

6°. Droite et Surface Polaire. — L'Eq. du plan normal étant

$$X\sin u - Y\cos u = m(Z-z)$$

et z étant égal à mRu, on aura pour les Eq. de la droite polaire

$$\begin{cases} X\sin u - Y\cos u = m(Z-z) \\ X\cos u + Y\sin u = m^2 R \end{cases}$$

Pour avoir la surface polaire, il suffira d'éliminer u entre ces Eq. Pour y parvenir, je fais la somme des carrés :

$$X^2+Y^2 = m^2\left\{(Z-mRu)^2 + m^2R^2\right\}$$

$$(Z-mRu)^2 = \frac{X^2+Y^2-m^4R^2}{m^2}$$

$$mRu = Z \pm \frac{\sqrt{X^2+Y^2-m^4R^2}}{m}$$

Substituant dans la 2e. Eq. cette valeur de u, j'obtiens pour la surface polaire l'Eq.

$$X\cos\left[\frac{Z \pm \frac{1}{m}\sqrt{X^2+Y^2-m^4R^2}}{mR}\right] + Y\sin\left[\frac{Z \pm \frac{1}{m}\sqrt{X^2+Y^2-m^4R^2}}{mR}\right] = -m^2R$$

Pour avoir sa trace sur le plan des xy, il faut faire $Z=0$, nous poserons en même temps $m^2R = r$:

$$(a) \qquad X\cos\frac{\sqrt{X^2+Y^2-r^2}}{r} + Y\sin\frac{\sqrt{X^2+Y^2-r^2}}{r} = -r$$

or cette courbe est la développante du cercle dont le rayon est $r = m^2R$.
En effet, la droite polaire est dans le plan tangent au cylindre de rayon r : car elle est perp. au point R au rayon de courbure MR, et même au plan osculateur du point M. Par suite elle est inclinée sur le plan des xy d'un angle dont la tangente est $\frac{1}{m}$. Il en résulte qu'elle est tangente à l'Hélice lieu des points R : car la tangente de l'inclinaison d'une droite touchant l'Hélice sur le plan de base est en général $\frac{h}{2\pi r}$: donc ici, c'est $\frac{h}{2\pi Rm^2} = \frac{m}{m^2} = \frac{1}{m}$.

Mais d'autre part nous avons démontré que la trace de la tangente à l'Hélice sur le cercle de base décrit la développante de ce cercle.

Donc le lieu des points où le plan des xy est rencontré par la droite polaire, ou la tangente à l'Hélice lieu des points R, est la développante du cercle de rayon $r = R^2m^2$.

on peut d'ailleurs vérifier ce résultat en cherchant directement l'Eq. de la développante d'un cercle.

Prenons pour inconnue auxiliaire l'angle $BOA = \theta$. L'Eq. naturelle de la développante

$$BM = \text{Arc } AB$$

deviendra

$$BM = r\theta$$

D'ailleurs $\overline{BM}^2 = \overline{OM}^2 - r^2 = x^2 + y^2 - r^2$, $r^2\theta^2 = x^2+y^2-r^2$, et aussi $x\cos\theta + y\sin\theta = r$. (en projetant le contour OPM et sa résultante OM sur OB).

En remplaçant θ par sa valeur, il vient :

$$x\cos\frac{\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{r} + y\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{r} = r$$

Ici nous avons compté les x et les y en sens contraire de ceux dans lequel ils sont comptés pour l'Eq. (a). En faisant le changement convenable, on voit que les deux Eq. coïncident.

Rem. on peut trouver l'Eq. de la surface polaire comme lieu des tangentes à l'Hélice décrite par le centre de courbure de l'Hélice primitive. — En continuant de désigner par r le rayon de base du cylindre sur lequel est tracé cette hélice, nous avons pour les Equations

$$x = r\cos\frac{2\pi z}{h} \qquad y = r\sin\frac{2\pi z}{h} \qquad \text{d'où} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dz} = -\dfrac{2\pi r}{h}\sin\dfrac{2\pi z}{h} \\ \dfrac{dy}{dz} = \dfrac{2\pi r}{h}\cos\dfrac{2\pi z}{h} \end{cases}$$

Les Eq. de la tangente seront donc, au point $z = \alpha$,

$$\begin{cases} X - r\cos\dfrac{2\pi\alpha}{h} = -\dfrac{2\pi r}{h}\sin\dfrac{2\pi\alpha}{h}\cdot(Z-\alpha) \\ Y - r\sin\dfrac{2\pi\alpha}{h} = \dfrac{2\pi r}{h}\cos\dfrac{2\pi\alpha}{h}\cdot(Z-\alpha) \end{cases}$$

Pour avoir le lieu cherché, il suffit d'éliminer α entre ces Eq. Mais à ces deux Eq. on peut en substituer d'autres. Pour cela, éliminons d'abord les seconds membres en multipliant la 1ère Eq. par $\cos\frac{2\pi\alpha}{h}$, la 2e par $\sin\frac{2\pi\alpha}{h}$, et ajout.

$$X\cos\frac{2\pi\alpha}{h} + Y\sin\frac{2\pi\alpha}{h} - r = 0$$

Eliminons maintenant les termes qui contiennent r dans les 1ers membres :

$$X\sin\frac{2\pi\alpha}{h} - Y\cos\frac{2\pi\alpha}{h} = -\frac{2\pi r}{h}(Z-\alpha)$$

Ces 2 Eq. remplaçant les précédentes : or ce sont celles de la droite polaire : donc, en éliminant α, nous retomberons sur l'Eq. déjà trouvée pour la surface polaire.

Sur la courbure des Surfaces.

on a trouvé (p. 185)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \alpha + \frac{1}{R_2} \sin^2 \alpha$$

relation remarquable entre les rayons de courbure des sections normales principales et celui d'une section quelconque, et qui a été trouvé d'abord par Euler.

Observons que si l'on compare deux sections normales perp. l'une à l'autre, leurs rayons de courbure ρ_1 et ρ_2 se déduiront de cette formule en y faisant successivement $\alpha = \alpha'$ et $\alpha = \alpha' + \frac{\pi}{2}$: ce qui donne

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \alpha' + \frac{1}{R_2} \sin^2 \alpha'$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{R_1} \sin^2 \alpha' + \frac{1}{R_2} \cos^2 \alpha'$$

ajoutant :

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

d'où ce Théorème :

La somme des inverses des rayons de courbure de deux sections normales à angle droit est constante, et égale à la somme des inverses des rayons de courbure des sections principales.

Lorsque les deux rayons principaux sont de même signe, le plus petit des deux est minimum parmi tous les rayons de courbure des diverses sections normales, et le plus grand est

maximum entre deux. — En effet, si nous supposons R_1 et R_2 tous deux positifs, et $R_1 < R_2$: pour $\alpha = 0$, $\rho = R_1$ et, α augmentant jusqu'à $90°$, ρ augmente comme le montre la formule mise sous la forme

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1} + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \sin^2\alpha$$

car R_1 étant $< R_2$, la différence qui multiplie $\sin^2\alpha$ est négative. — Enfin, quand $\alpha = 90°$, $\rho = R_2$. D'ailleurs, si l'on écrit la formule

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_2} - \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \cos^2\alpha$$

on voit que, pour toute valeur de α,

$$\rho > R_1 \quad \text{et} \quad \rho < R_2$$

ce que je voulais démontrer.

Nous avons trouvé pour caractère général des surfaces convexes que $s^2 - rt$ soit < 0. Or dans le cas actuel, cette condition se réduit à $-rt < 0$, et elle est toujours satisfaite. Car on a $-rt = -\frac{1}{R_1 R_2}$. — La surface est donc convexe. Ce que l'on voit d'ailleurs en observant que, quelle que soit la valeur de α, ρ est constamment de même signe que R_1 et R_2.

Considérons une ellipse dont les demi-axes soient $\sqrt{R_1}$ et $\sqrt{R_2}$, son éq. sera

$$\frac{y^2}{R_2} + \frac{x^2}{R_1} = 1$$

et représentons par ρ le carré d'un rayon vecteur de cette ellipse faisant avec l'axe des x l'angle α. Nous aurons

$$x = \sqrt{\rho}\cos\alpha \qquad y = \sqrt{\rho}\sin\alpha$$

et, en remplaçant x et y par ces valeurs,

$$\frac{1}{R_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{R_2}\sin^2\alpha = \frac{1}{\rho}$$

c.à.d. la relation qui existe entre les deux rayons principaux et le rayon de courbure d'une section faisant avec ox l'angle α. D'où

Théorème. – Les rayons de courbure des diverses sections normales d'une surface peuvent être représentés par les carrés des rayons vecteurs d'une ellipse dont les axes seraient les racines carrées des rayons de courbure principaux.

L'angle α est celui que fait le plan de la section considérée avec celui de la section principale dont le rayon est minimum.

Supposons maintenant les deux rayons de signes contraires, par ex. $R_1 > 0$ et $R_2 < 0$. Évidemment la surface sera non-convexe en M, puisqu'en ce point il y aura des sections placées au-dessus du plan tangent, d'autres au-dessous. – Pour déterminer les limites des unes et des autres, mettons en évidence les signes de R_1 et R_2 dans la formule d'Euler :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1}\cos^2\alpha - \frac{1}{R_2}\sin^2\alpha$$

En faisant varier α à partir de zéro, le rayon ρ commence par être positif et égal à R_1 ; puis il va en croissant jusqu'à l'infini, valeur qu'il atteint lorsque α prend la valeur α' déterminée par l'équation

$$\frac{1}{R_1}\cos^2\alpha' - \frac{1}{R_2}\sin^2\alpha' = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{tg}^2\alpha' = \frac{R_2}{R_1}.$$

Si donc on trace dans le plan tangent deux droites qui fassent chacune avec MX un angle α', ces droites seront les traces des deux plans normaux limites, tels que toutes les sections comprises entre ces deux droites auront des rayons de courbure positifs, et par suite seront au-dessus du plan tangent.

Si α augmente au-delà de α', ρ devient négatif, et décroît en valeur absolue depuis l'infini jusqu'à $\rho = -R_2$ pour $\alpha = 90°$. À partir delà, ρ augmente de nouveau jusqu'à l'infini, qu'il atteint pour $\alpha = 180° - \alpha'$. — D'où il suit que toutes les sections comprises dans le second angle formé par les droites dont j'ai parlé sont toutes situées au-dessous du plan tangent. Parmi ces rayons négatifs, R_2 est un maximum algébrique.

Dans le cas actuel, les rayons de courbure peuvent être représentés par les carrés des rayons vecteurs d'une hyperbole dont les axes seraient $\sqrt{R_1}$ et $\sqrt{R_2}\sqrt{-1}$. En effet, cette hyperbole a pour équation

$$\frac{x^2}{R_1} - \frac{y^2}{R_2} = 1$$

Mais en désignant par $\sqrt{\rho}$ un rayon vecteur faisant avec l'axe des x un angle α, nous aurons

$$x = \sqrt{\rho}\cos\alpha \qquad y = \sqrt{\rho}\sin\alpha$$

D'où

$$\frac{1}{R_1}\cos^2\alpha - \frac{1}{R_2}\sin^2\alpha = \frac{1}{\rho}$$

Tant que α est moindre que l'angle de l'asymptote avec l'axe des x, angle dont la tangente est

$$\operatorname{tg}\alpha' = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$$

c.a.d. tant que les rayons de courbure sont positifs, ils sont représentés en réalité par les carrés des rayons vecteurs de l'hyperbole. Ils le seront encore au-delà si l'on joint à cette 1ère hyperbole l'hyperbole conjuguée qui a mêmes asymptotes, mais dont l'axe transverse sera $\sqrt{R_2}$. — Les rayons vecteurs de cette seconde hyperbole représenteront les valeurs absolues des rayons de courbure négatifs.

Lorsque $R_1 = R_2$, la formule montre que, quel que soit α, $\rho = R_1$. alors toutes les sections normales faites autour de M ont une courbure égale, et peuvent être considérées toutes comme des sections principales. En effet, l'angle α qui détermine la position de ces sections principales devient indéterminé : car la valeur

$$tg\,2\alpha = \frac{2s}{r-t}$$

devient $tg\,2\alpha = \frac{0}{0}$, puisque $s = 0$ par hypothèse, et $r = t$ en vertu des relations $R_1 = \frac{1}{r}$ $R_2 = \frac{1}{t}$ et $R_1 = R_2$.

Un tel point, jouissant de la propriété que toutes les sections normales qui y passent ont même courbure, s'appelle un **Ombilic**. Ainsi, tous les points d'une sphère sont des ombilics. De même une surface de révolution a un ombilic à chacun des points où sa courbe méridienne est rencontrée par l'axe, pourvu qu'en ce point le plan tangent soit perpendiculaire à l'axe.

Compléments de Calcul Intégral.

Sur l'Intégration de l'expression

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

---

on a trouvé, pour m positif, la formule de réduction

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{m} x^{m-1}\sqrt{1-x^2} + \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si m était négatif, la formule, loin de réduire l'exposant, l'augmenterait au contraire. alors on la résout par rapport à l'intégrale du second membre, et, en posant $m-2 = -m'$, d'où $m' = 2-m$, on a, en supprimant les accents

$$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}}$$

Lorsque m sera pair, on arrivera, en faisant $m=2$, à cette égalité

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

et la formule donne immédiatement une intégrale finie.

Si m est impair, la plus petite valeur qu'on puisse lui attribuer est 3, alors

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

ainsi l'on est ramené à intégrer $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$, ou bien

$$\int x^{-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

diff. binôme de la forme ordinaire, et que nous pouvons



intégrer par la méthode d'Euler. Car ici $\frac{m+1}{n}$ est entier puisqu'il est nul. Nous pouvons poser

$$1-x^2 = z^2 \quad \text{d'où} \quad x^2 = 1-z^2$$

$$x^{-1} = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$x\,dx = -z\,dz$$

donc

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{dz}{1-z^2} = -\int \frac{dz}{2(1-z)} - \int \frac{dz}{2(1+z)} = \frac{1}{2}\mathcal{L}(1-z) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(1+z) + C$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\frac{1-z}{1+z} + C = \frac{1}{2}\mathcal{L}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + C = \frac{1}{2}\mathcal{L}\frac{(1-\sqrt{1-x^2})^2}{x^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \mathcal{L}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + C$$

Rem. – Cette intégration se fera d'une manière plus rapide en observant que

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\frac{dx}{x^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}} = -\mathcal{L}\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}\right) + C$$

$$= -\mathcal{L}\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + C = \mathcal{L}\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right) + C = \mathcal{L}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + C$$

nous retrouvons le même résultat.

Intégration des Différentielles Transcendantes.

On a trouvé (p. 228)

$$\int a^x p\,dx = \frac{a^x}{La} p\,dx - \int \frac{a^x}{La} \frac{dp}{dx}\,dx$$

ce qui permet de ramener p à une constante, si p est une fonction rationnelle et entière.

Cette méthode s'applique à la fonction

$$\int a^x x^n\,dx$$

pourvu que n soit positif.

S'il était négatif, comme les différentiations successives, loin de remplir le but qu'on se propose, augmenteraient l'exposant, alors on intègre par parties en faisant porter la différentiation sur a^x. Il vient ainsi

$$\int a^x x^{-n}\,dx = \frac{a^x x^{-n+1}}{-n+1} + \frac{1}{n-1} \int \frac{1}{x^{n-1}} \frac{a^x}{La}\,dx$$

ou

$$\int \frac{a^x}{x^n}\,dx = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)La} \int \frac{a^x}{x^{n-1}}\,dx$$

Cette formule n'est plus applicable dès que $n=1$: c'est qu'alors en effet, il n'est plus possible d'intégrer sous forme finie. L'intégration directe par parties donne alors

$$\int \frac{a^x dx}{x} = a^x Lx - La \int a^x Lx\,dx$$

formule plus compliquée que l'intégrale proposée.

occupons-nous maintenant de la fonction différentielle

$$(Lx)^n p\,dx$$

dans laquelle, pour qu'il soit possible d'intégrer, la fonction p doit avoir le même caractère que tout-à-l'heure. — Dans ce cas, la différentielle du logarithme étant algébrique, il faudra faire porter l'intégration sur $p\,dx$, toutes les fois qu'on saura intégrer cette fonction. Soit $\int p\,dx = q$. on aura

$$\int (Lx)^n p\,dx = q(Lx)^n - \int \frac{q\,n(Lx)^{n-1}}{x}dx$$

Si maintenant on sait intégrer $\frac{q}{x}dx$, on continuera de la même manière. Soit $\int \frac{q}{x}dx = r$:

$$\int \frac{q\,n(Lx)^{n-1}dx}{x} = n(Lx)^{n-1}r - n(n-1)\int (Lx)^{n-2} r\frac{dx}{x}$$

et ainsi de suite.

Soit par exemple

$$\int (Lx)^n x^m dx$$

L'intégration par parties nous donne

$$\int (Lx)^n x^m dx = \frac{(Lx)^n x^{m+1}}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int (Lx)^{n-1} x^m dx$$

ainsi, par un hasard de calcul, l'exposant de Lx diminue, tandis que celui de x ne varie pas. — En continuant, nous aurons donc

$$\int (Lx)^n x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left\{(Lx)^n - \frac{n}{m+1}(Lx)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2}(Lx)^{n-2} + \dots\right\} + C$$

Lorsque $m = -1$, cette formule devient illusoire. or on a alors

$$\int (Lx)^n \frac{dx}{x}$$

qui s'intègre immédiatement.

Si l'exposant n était négatif, la marche précédente compliquerait cet exposant, bien loin de le diminuer. alors on suit la méthode déjà employée, c.à.d. qu'on résout par rapport à l'intégrale du second membre. on a ainsi

$$\int (Lx)^{n-1} x^m dx = \frac{x^{m+1}(Lx)^n}{n} - \frac{m+1}{n}\int (Lx)^n x^m dx$$

Posant maintenant $n-1 = -n$, nous avons

$$\int \frac{x^m dx}{(Lx)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(Lx)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m dx}{(Lx)^{n-1}}$$

Cette formule pouvait d'ailleurs se trouver directement en remarquant que $\int \frac{x^m dx}{(Lx)^n} = \int x^{m+1}\frac{dx}{x}(Lx)^{-n}$ et intégrant par parties.

En continuant ainsi, on ramenera la fonction proposée $\int \frac{x^m dx}{(Lx)^n}$ à dépendre de l'intégration de celle-ci

$$\int \frac{x^m dx}{Lx}$$

qui n'est plus donnée par la formule, et qu'en effet on ne sait pas intégrer. — Ce n'est point cependant un nouveau cas d'impossibilité: car il est facile de ramener cette intégrale à la forme

$$\int a^x \frac{dx}{x}$$

qui s'est présentée tout-à-l'heure comme impossible à trouver.

Posons en effet
$$x^{m+1} = e^z$$

d'où
$$(m+1)x^m dx = e^z dz$$

et aussi
$$(m+1)Lx = z$$

Divisons membre à membre
$$\frac{x^m dx}{Lx} = \frac{e^z dz}{z}$$

Fonctions Circulaires.

Soit à intégrer

$$\int \text{arc tg} x \, dx$$

Intégrons par parties.

$$\int \text{arc tg} x \, dx = x \, \text{arc tg} x - \int x \frac{dx}{1+x^2}$$

or

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}(1+x^2) + C$$

Donc

$$\int \text{arc tg} x . dx = x \, \text{arc tg} x - \frac{1}{2}\,\mathcal{L}(1+x^2) + C$$

Soit proposé

$$\int (\text{arc tg} x)^2 dx$$

L'intégration par parties donne

$$\int (\text{arc tg} x)^2 dx = x(\text{arc tg} x)^2 - \int x . 2 \,\text{arc tg} x \frac{dx}{1+x^2}$$

Mais

$$2\int \text{arc tg} x \frac{x\,dx}{1+x^2} = \text{arc tg} x \,\mathcal{L}(1+x^2) - \int \mathcal{L}(1+x^2)\frac{dx}{1+x^2}$$

ainsi le procédé ne réussit pas, car on arrive à une intégrale compliquée. on ne la simplifierait pas en posant $1+x^2 = u$.

Soit à intégrer

$$\int (\text{arc sin} x)^n dx$$

L'intégration par parties donne

$$\int (\text{arc sin} x)^n dx = x(\text{arc sin} x)^n - n\int (\text{arc sin} x)^{n-1}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

on sait que

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

on peut donc encore intégrer par parties :

$$\int (\arcsin x)^{n-1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\,(\arcsin x)^{n-1} + (n-1)\int (\arcsin x)^{n-2}\,dx\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

En substituant

$$\int (\arcsin x)^n dx = x(\arcsin x)^n - n\sqrt{1-x^2}\,(\arcsin x)^{n-1} - n(n-1)\int (\arcsin x)^{n-2} dx$$

Si n est pair, la question peut être regardée comme résolue. — Si n est impair, on sera ramené à intégrer $\arcsin x\,dx$. Or

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Soit encore

$$\int \arcsin x \cdot x^n dx$$

on a

$$\int \arcsin x\, x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\arcsin x - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

L'intégration est ramenée à celle de $\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$, qu'on sait opérer si n est entier.

L'intégration par parties fournit quelquefois entre des intégrales inconnues des Eq. que l'on sait résoudre.

Soit par ex. à trouver les deux intégrales

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx \quad \text{et} \quad \int e^{ax}\sin bx\,dx$$

on a

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{\cos bx\, e^{ax}}{a} + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{\sin bx\, e^{ax}}{a} - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

Je multiplie la seconde équation par $\frac{b}{a}$, et je l'ajoute à la 1ère. J'obtiens :

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2+b^2} e^{ax} + C$$

Je multiplie la 1ère par $-\frac{b}{a}$, et je l'ajoute à la seconde ; j'ai

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2+b^2} e^{ax} + C'$$

Rem. — On arrive encore à ces formules au moyen des Imaginaires. On a, en Général :

$$\int e^{mx} dx = \frac{e^{mx}}{m} \quad \text{d'où} \quad \int e^{(a+b\sqrt{-1})x} dx = \frac{e^{(a+b\sqrt{-1})x}}{a+b\sqrt{-1}}$$

or $\quad e^{(a+b\sqrt{-1})x} = e^{ax} \cdot e^{bx\sqrt{-1}}$, et $e^{xb\sqrt{-1}} = \cos bx + \sqrt{-1} \sin bx$

En substituant, il vient

$$\int e^{(a+b\sqrt{-1})x} dx = e^{ax} \frac{\cos bx + \sqrt{-1} \sin bx}{a+b\sqrt{-1}}$$

ou

$$\int e^{ax} (\cos bx + \sqrt{-1} \sin bx) \, dx = e^{ax} \frac{\cos bx + \sqrt{-1} \sin bx}{a^2+b^2} (a - b\sqrt{-1})$$

en effectuant, et égalant entre elles les parties réelles et les parties Imaginaires, on retombe sur les formules précédentes.

Une fonction rationnelle et entière de Sinus et de Cosinus peut toujours s'intégrer après qu'on a changé par les formules connues les puissances de sinus et cosinus en sinus et cosinus d'arcs multiples, et les produits de sinus et cosinus d'arcs différents en simples sinus et cosinus.

Soit par exemple à Intégrer

$$\int \sin(mx+n) \cos(px+q) \, dx$$

on appliquera la formule

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$$

et l'on en déduira

$$\sin(mx+n)\cos(px+q) = \tfrac{1}{2}\sin[(m+p)x+n+q] - \tfrac{1}{2}\sin[(m-p)x+n-q]$$

donc

$$\int \sin(mx+n)\cos(px+q)\,dx = -\frac{\cos[(m+p)x+n+q]}{2(m+p)} - \frac{\cos[(m-p)x+n-q]}{2(m-p)} + C$$

La fonction plus simple

$$\int \sin(mx+n)\,dx$$

s'intégrerait immédiatement :

$$\int \sin(mx+n)\,dx = -\frac{1}{m}\cos(mx+n) + C$$

Cherchons maintenant

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx$$

on peut, par un changement de variable, revenir à une différentielle binome. Posons $z = \sin x$, $\cos x = \sqrt{1-z^2}$, $dz = \cos x\,dx = \sqrt{1-z^2}\,dx$

Il viendra

$$\sin^m x \cos^n x\,dx = z^m (1-z^2)^{\frac{n}{2}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = z^m (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz$$

Si $\frac{m+1}{2}$ est entier, c.à.d. si m est impair, la fonction est intégrable quelque soit n. — Si $\frac{n-1}{2}$ est entier, c.à.d. si n est impair, la fonction peut se développer en une suite infinie de monomes, et est intégrable quel que soit m. — Si, m et n étant pairs, la somme $\frac{m+1}{2} + \frac{n-1}{2}$ ou $\frac{m+n}{2}$ est un entier, la fonction est encore intégrable. — ainsi, en résumé, elle le sera toutes les fois que m et n seront entiers.

On peut aussi appliquer l'intégration par parties.

Nous commencerons par les cas les plus simples.

1°. $n = 0$. On a

$$\int \sin^m x\,dx$$

or on aura

$$\sin^m x\,dx = \sin^{m-1} x \sin x\,dx$$

$$\int \sin^m x\,dx = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1)\int \cos^2 x \sin^{m-2} x\,dx$$

$$= -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1)\int \sin^{m-2} x\,dx - (m-1)\int \sin^m x\,dx$$

d'où

$$\int \sin^m x\,dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x\,dx$$

en appliquant de nouveau cette formule, on arrive à $\int dx$ ou bien à $\int \sin x\,dx$, suivant que m est pair ou impair. La question est donc résolue.

2°. Si l'on pose dans la formule précédente $x = \frac{\pi}{2} - x'$, et $m = n$, on aura (en supprimant l'accent de x')

$$\int \cos^n x\,(-dx) = -\frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,(-dx)$$

ou bien.

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

3°. Pour passer au cas où m est négatif, nous résoudrons les formules précédentes par rapport à $\int \sin^{m-2} x\,dx$ ou $\int \cos^{n-2} x\,dx$; nous changerons ensuite (pour le sinus seulement) $m-2$ en $-m$, et nous aurons

$$\int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{\cos x}{(m-1)\sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2} x}$$

En continuant, on arrive à $\int \frac{dx}{\sin x}$ si m est impair, et à $\int dx$ si m est pair. Or

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \int \frac{d.\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \mathcal{L}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$$

4°. Si dans ces formules on remplace x par $\frac{\pi}{2} - x$, et m par n, on aura

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

on serait conduit finalement à intégrer $\frac{dx}{\cos x}$. or

$$\int \frac{dx}{\cos x} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = -\mathcal{L}\,\mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + C = -\mathcal{L}\,\mathrm{Tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + C$$

$$= \mathcal{L}\,\mathrm{Cot}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + C = \mathcal{L}\,\mathrm{Tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) + C$$

Rem. I. La formule de Moivre donne encore un moyen d'intégrer $\sin^m x\,dx$ et $\cos^n x\,dx$: car elle donne le développement de ces fonctions suivant les puissances entières des sinus et cosinus des arcs multiples. — Par ex. $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ donc $\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$.

Rem. II. Le problème des oscillations du pendule conduit à une fonction dont on peut ramener l'intégration aux intégrales précédentes. Cette fonction est

$$\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}}$$

Posons

$$\cos\alpha = 1-\beta \qquad \cos\theta = 1-x$$

il s'ensuivra

$$dx = \sin\theta\, d\theta = d\theta\,\sqrt{2x-x^2}$$

donc

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}\sqrt{2(\beta-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4x(\beta-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\beta x - x^2}}$$

on a vu dans le calcul différentiel que

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots + \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \dots$$

et ce développement est une série convergente toutes les fois que $-1 < \frac{x}{2} < 1$, ou quand x varie de -2 à $+2$. or c'est ce qui arrive ici, puisque $x = 1-\cos\theta$. — on développera donc la fraction proposée, et l'on intégrera chaque terme séparément. or le terme général du développement, abstraction faite du coefficient, est

$$\frac{x^n\,dx}{\sqrt{\beta x - x^2}}$$

Posons

$$x = \beta \sin^2 z$$

d'où

$$dx = 2\beta \sin z \cos z\,dz$$

Le terme général devient

$$\frac{2\beta^{n+1} \sin^{2n+1} z \cos z\,dz}{\sqrt{\beta^2 \sin^2 z \cos^2 z}} = 2\beta^n \sin^{2n} z\,dz$$

ce qu'on sait intégrer.

5°. Revenons maintenant à l'intégration de la fonction

$$\sin^m x \cos^n x\,dx$$

dans le cas général.

Cherchons d'abord à diminuer l'exposant de $\sin x$. — On remarquera que

$$\sin^m x \cos^n x\,dx = \sin^{m-1} x \sin x \cos^n x\,dx = -\sin^{m-1} x \cos^n x\,d.\cos x$$

par suite

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \cos^{n+2} x \sin^{m-2} x\,dx$$

$$= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\,dx - \frac{m-1}{n+1}\int \sin^m x \cos^n x\,dx$$

et en résolvant

$$(1)\qquad \int \sin^m x \cos^n x\,dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\,dx$$

en continuant, on ramènera l'exposant de $\sin x$ à être 0 ou 1.

Si maintenant on veut abaisser l'exposant de $\cos x$, il suffit de changer dans la formule précédente x en $\frac{\pi}{2} - x$, et m en n; on aura

$$\int \cos^n x \sin^m x\,d(-x) = -\frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^{n-2} x \sin^m x\,(-dx)$$

ou

$$(2)\qquad \int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x\,dx$$

et l'on pourra ainsi ramener l'exposant de Cos x à être nul ou égal à 1.

En définitive, on aura donc à intégrer l'une des expressions

$$dx\,,\quad \sin x\,dx\,,\quad \cos x\,dx\,,\quad \sin x \cos x\,dx$$

ce qui est facile.

Enfin, si m ou n devenaient négatifs, soit séparément, soit simultanément, on résoudrait les formules (1) et (2) par rapport aux secondes ~~m~~ intégrales, et l'on arriverait à des formules de réduction appropriées à ces cas.

Il est évident qu'en combinant cette hypothèse avec la première, on pourra alors être ramené à intégrer l'une des fonctions

$$\frac{dx}{\sin x}\qquad \frac{dx}{\cos x}\qquad \frac{\sin x\,dx}{\cos x}\qquad \frac{\cos x\,dx}{\sin x}\qquad \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

or les deux premières ont été trouvées (p. 510)

$$\int \frac{dx}{\sin x} = L\,\mathrm{Tg}\,\frac{x}{2}\qquad \int \frac{dx}{\cos x} = L\,\mathrm{Tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

Restent les trois dernières.

or

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = -\int \frac{d.\cos x}{\cos x} = -\,L\cos x + C$$

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \int \frac{d.\sin x}{\sin x} = L\sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{d.2x}{\sin 2x} = L\,\mathrm{Tg}\,x + C$$

ainsi le problème peut être considéré comme résolu en général.

Intégrales Définies.

Soit

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

et supposons que cette intégrale doive s'annuler pour $x = a$. Il faudra que l'on ait

$$F(a) + C = 0$$

$$C = -F(a)$$

alors l'intégrale proposée devient

$$\int f(x)\,dx = F(x) - F(a)$$

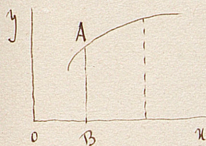
Cette forme n'est pas moins générale que la 1ère, la quantité x restant indéterminée. – Si on lui donne une valeur particulière, l'intégrale $\int f(x)\,dx$ ne représente plus alors que la différence entre la valeur que prend $F(x)$ pour $x = a$ et celle qu'elle acquiert pour toute autre valeur de la variable. Supposons que l'on fasse $x = b$, l'intégrale sera $F(b) - F(a)$; on dit alors que l'intégrale commence à $x = a$, et qu'elle est prise de a à b: ce que l'on représente par la notation

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

qui est due à Fourier. – Euler écrivait $\int \left(\begin{smallmatrix} x=a \\ x=b \end{smallmatrix}\right) f(x)\,dx$ ou $\int f(x)\,dx \left[\begin{smallmatrix} x=a \\ x=b \end{smallmatrix}\right]$.

Les deux valeurs $x=a$ et $x=b$ sont les Limites de l'Intégrale: et l'intégrale prise entre ces valeurs limites, ou bien la différence des valeurs qu'elle acquiert pour $x=a$ et $x=b$, est appelée Intégrale Définie.

Nous avons vu que si l'on construit la courbe $y=f(x)$, l'aire de cette courbe n'est autre chose que l'intégrale indéfinie $\int f(x)dx = F(x)+C$. En effet, le calcul différentiel nous a appris que l'aire comprise entre l'ordonnée fixe AB et une ordonnée y correspondante à une abscisse variable x a pour différentielle ydx ou $f(x)dx$. – Quant à la constante C, sa valeur dépend de l'origine assignée au segment: si cette origine correspond à l'abscisse $x=a$, on a alors $C=-F(a)$. Que l'on suppose en outre le segment terminé à $x=b$, et l'on verra alors que l'intégrale définie prise de a à b, ou



$$F(b)-F(a)$$

n'est autre que le segment compris entre les deux ordonnées correspondantes à $x=b$ et $x=a$.

Par extension de la notation de Fourier, si l'on voulait laisser arbitraire la limite supérieure b, on écrirait

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a)$$

et alors, si a est indéterminé, on voit qu'une Intégrale Indéfinie pourra être remplacée, sans moins de généralité, par une Intégrale Définie.

Dans tout ce qui va suivre, nous considérerons $F(x)$ comme une fonction continue: car la notation exige que la fonction passe de a à b par degrés insensibles. Cela n'oblige pas d'ailleurs $f(x)$ à être continue: car l'ordonnée d'une courbe peut passer brusquement d'une valeur à une autre sans que

pour cela l'aire cesse d'être une fonction continue, pourvu toutefois que l'aire ne devienne pas infinie.

Th. Quand on renverse les limites, l'intégrale change de signe.

C. a d.

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Nous supposerons donc toujours dans la suite $a < b$.

Il ressort encore de la définition d'une intégrale définie que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^b f(x)\,dx$$

α, β, γ étant absolument quelconques, compris ou non entre a et b. — En effet :

$$F(b) - F(a) = F(\alpha) - F(a) + F(\beta) - F(\alpha) + F(\gamma) - F(\beta) + F(b) - F(\gamma)$$

Th. Une intégrale définie peut être regardée comme la limite de la somme de ses éléments.

Supposons l'intervalle $b-a$ partagé en n parties α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$. Nous appelons élément de l'intégrale les quantités

$$f(a)\,\alpha_1\,, \quad f(a+\alpha_1)\,\alpha_2\,, \quad \ldots \quad f(a+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1})\,\alpha_n\,.$$

or on a par définition

$$F(a+\alpha_1) - F(a) = \alpha_1 \left\{ f(a) + \varepsilon_1 \right\}$$

$$F(a+\alpha_1+\alpha_2) - F(a+\alpha_1) = \alpha_2 \left\{ f(a+\alpha_1) + \varepsilon_2 \right\}$$

$$\ldots$$

$$F(a+\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}) - F(a+\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-2}) = \alpha_{n-1} \left\{ f(a+\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-2}) + \varepsilon_{n-1} \right\}$$

$$F(a+\alpha_1+\cdots+\alpha_n = b) - F(a+\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}) = \alpha_n \left\{ f(a+\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}) + \varepsilon_n \right\}$$

ajoutant, on a

$$F(b) - F(a) = \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f(a+\alpha_1) + \cdots + \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \cdots + \alpha_n \varepsilon_n$$

or $\alpha_1 \varepsilon_1$ est infiniment petit par rapport à $\alpha_1 f(a)$; de même les autres. Donc

$$F(b) - F(a) = \lim \left\{ \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f(a+\alpha_1) + \cdots + \alpha_n f(a+\alpha_1+\cdots+\alpha_n) \right\}$$

(9 f1).

Cette propriété est susceptible d'une interprétation géométrique. Concevons une courbe ayant pour éq. $y = f(x)$. L'aire comprise entre les deux ordonnées correspondantes aux abscisses a et b représente l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$. – La proposition revient à dire que cette aire est la limite d'une somme de rectangles ayant pour base une partie de $b-a$ et pour hauteur une ordonnée.

Cela suppose que l'ordonnée ne passe pas par l'infini dans l'intervalle de a à b.

Si l'ordonnée passait par zéro, $f(x)\,dx$ changerait de signe, et l'intégrale représenterait la différence des aires. Pour avoir leur somme arithmétique, il faudrait les calculer séparément. On devra faire bien attention à cela dans les applications géométriques.

Le théorème précédent sert à trouver quelques propriétés d'intégrales que l'on ne sait pas effectuer, mais sur lesquelles on a des données.

Soit $\int_a^b f(x)\,dx$ une intégrale qu'on ne sait pas trouver. Quel est son signe ? on a en général

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

L'intégrale sera positive si $F(x)$ est croissant de $x=a$ à $x=b$,

c.a.d. si $f(x)$ est >0 ; elle sera négative dans le cas contraire.

Il est des cas où l'on peut prévoir que l'intégrale est nulle. – Soit

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^{2m} \sin x\, dx$$

Supposons que x croisse de $-\pi$ à $+\pi$; lorsque x passera de $-\pi$ à 0, $\sin x$ prendra des valeurs égales et de signes contraires à celles qu'il aura lorsque x ira de 0 à $+\pi$: x^{2m} reprendra les mêmes valeurs. ainsi les éléments se détruisent deux à deux, et l'intégrale est nulle.

En général, si $\varphi(x)$ est une fonction paire, c.a.d. telle que $\varphi(-x) = \varphi(x)$, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin x\, dx = 0$$

De même, si $\varphi(x)$ est une fonction impaire, $\varphi(-x) = -\varphi(x)$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos x\, dx = 0$$

On peut encore trouver des limites entre lesquelles est comprise une intégrale inexécutable, telle que $\int_a^b f(x)dx$. – Supposons que l'on ait toujours $f(x) < \varphi(x)$, ou

$$\varphi(x) - f(x) > 0$$

on aura donc

$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\, dx > 0$$

d'où

$$\int_a^b \varphi(x)dx > \int_a^b f(x)dx$$

ainsi, $\varphi(x)$ étant une fonction connue, on a une limite que l'intégrale ne peut dépasser.

Si l'on a toujours $f(x) > \chi(x)$, on aura de même

$$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b \chi(x)dx$$

C'est en effet ce que montre bien la Géométrie.

Si au lieu de deux fonctions $\varphi(x)$ et $\chi(x)$, on peut avoir

$$B < f(x) < A$$

on en déduira

$$\int_a^b f(x)\,dx < (b-a)A$$

$$\int_a^b f(x)\,dx > (b-a)B$$

et par conséquent, θ étant une fraction comprise entre 0 et 1,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,M(B,A)$$

$M(A,B)$ désignant une certaine valeur intermédiaire entre A et B.

Si maintenant $f(x)$ est continue, on pourra écrire

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f\left(a+\theta(b-a)\right)$$

(en supposant encore que $f(x)$ va toujours en croissant de a à b, c'est évident par la Géométrie ; car alors $A = f(b)$ et $B = f(a)$)

Supposons par exemple qu'on ne sache pas intégrer

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^m}}$$

et cherchons-en deux limites. Je suppose $m>1$; on a $x<1$. De là, $x^m < x$. Donc en remplaçant x^m par x, je diminue le radical, et j'augmente la fraction. Donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^m}} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

or on a $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x}$, et $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2-\sqrt{2}$. Donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^m}} < 2-\sqrt{2}$$

Pour trouver une limite inférieure, je supposerai qu'on donne à m une valeur intermédiaire particulière, $m = \frac{3}{2}$ par ex. alors

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{\frac{3}{2}}}} > \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

or, l'intégrale du second membre est $\arcsin x + C$; et, entre les limites 0 et $\frac{1}{2}$, elle donne $\frac{\pi}{6}$. Donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{\frac{3}{2}}}} > \frac{\pi}{6}$$

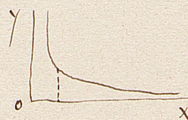
on aurait en général

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^m}} > \int_0^{\frac{1}{2}} dx > \frac{1}{2}$$

Nous avons supposé jusqu'ici que les limites a et b de l'intégrale étaient finies. — Nous allons maintenant chercher ce que devient l'intégrale lorsque l'une des limites est infinie. On appelle valeur de l'intégrale

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx$$

ce que devient l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ quand b croît au-delà de toutes limites. — Il peut arriver que cette limite existe ; mais cette intégrale sera souvent infinie, comme $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x}$. Car $\int_a^b \frac{dx}{x} = L\frac{b}{a}$, et $L\infty = \infty$. Cela montre que l'aire de la courbe $y = \frac{1}{x}$ n'a pas de limite, bien que l'ordonnée ait zéro pour limite.



Mais on comprend aussi que l'intégrale puisse avoir une

limite. Soit pour exemple

$$\int_1^\infty \frac{(2x+1)\,dx}{x^3}$$

La fraction $\frac{2x+1}{x^3}$ peut s'écrire $\frac{1}{x^2}\left(2+\frac{1}{x}\right)$. x restant toujours de 1 à ∞, plus grand que 1, cette fonction est moindre que $\frac{3}{x^2}$. Donc

$$\int_1^b \frac{(2x+1)\,dx}{x^3} < 3\int_1^b \frac{dx}{x^2}$$

or $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$, et $\int_1^b \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{b}$. Donc

$$\int_1^b \frac{(2x+1)\,dx}{x^3} < 3\left(1-\frac{1}{b}\right)$$

Si b devient infini, on aura

$$\int_1^\infty \frac{(2x+1)\,dx}{x^3} < 3$$

Si donc on construit la courbe $y = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}$, à laquelle l'axe des x est asymptote, l'aire comptée à partir de l'ordonnée correspondante à $x=1$ est finie et moindre que 3.

En général, toutes les fois qu'il sera possible de reconnaître que la fonction est moindre que $\frac{A}{x^n}$, $n>1$, l'intégrale est finie. — Cela se voit aisément. Car, si cela se vérifie à partir de $x=h$: comme on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^h f(x)\,dx + \int_h^b f(x)\,dx$$

et que

$$\int_h^b f(x)\,dx < A\int_h^b \frac{dx}{x^n} < \frac{A}{n-1}\left\{\frac{1}{h^{n-1}} - \frac{1}{b^{n-1}}\right\}$$

$\frac{1}{b^{n-1}}$ disparaît pour b infini, donc

$$\int_h^\infty f(x)\,dx < \frac{A}{n-1}\left\{\frac{1}{h^{n-1}}\right\}$$

D'où l'on conclut, $\int_a^h$ étant fini, que $\int_a^\infty$ l'est aussi.

au contraire, quand on pourra reconnaître que $f(x) > \frac{A}{x^n}$ $n \leqq 1$, l'intégrale sera infinie. Car alors

$$\int_h^b f(x)dx > A\int_h^b \frac{dx}{x} > A\, L\frac{b}{h}$$

qui devient infini pour $b = \infty$.

Soit l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$, et supposons que $f(x)$ devienne infini pour $x = b$, ce qui arrivera par exemple toutes les fois que $f(x)$ sera de la forme $\frac{\varphi(x)}{(x-b)^n}$. Il semble qu'alors l'intégrale n'a plus de signification, et la géométrie n'explique rien : car la courbe $y = f(x)$ a dans ce cas une asymptote parallèle à l'axe des y. — On convient d'appeler intégrale de a à b la limite vers laquelle converge

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

quand ε, quantité positive très-petite, converge vers zéro.

Dans quel cas l'intégrale aura-t-elle des limites finies ? Dans quel cas sera-t-elle infinie ? — Puisque $f(x)$ devient infini pour $x = b$, on peut, comme je l'ai déjà dit, poser

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(b-x)^n}$$

$\varphi(x)$ restant fini et non nul, et, selon que n est < 1 ou $\geqq 1$, l'intégrale de a à b est finie, ou n'a pas de limite.

En effet, soit h une quantité comprise entre a et b, et aussi près de b qu'on voudra. On aura

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int_a^h f(x)dx + \int_h^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

on peut admettre que h a été pris assez voisin de b pour que $\varphi(x)$ reste fini pour toute valeur de x comprise entre h et b ;

Il est donc possible de concevoir une valeur finie m de $\varphi(x)$ moindre que toutes les autres, et une M plus grande que toutes. Soit d'abord $n<1$. Nous aurons

$$f(x) < \frac{M}{(b-x)^n}$$

par suite

$$\int_h^{b-\varepsilon} f(x)\,dx < \int_h^{b-\varepsilon} \frac{M\,dx}{(b-x)^n} \quad \text{ou que} \quad \frac{M}{1-n}\left\{(b-h)^{1-n} - \varepsilon^{1-n}\right\}$$

ε^{1-n} tend vers zéro avec ε, et par conséquent, $\int_h^{b-\varepsilon} \frac{M\,dx}{(b-x)^n}$ tend vers $\frac{M}{1-n}(b-h)^{1-n}$, limite finie. Donc, pour $n<1$, l'intégrale proposée a une limite finie.

Si $n \geq 1$, elle est infinie. — En effet, prenons la plus petite m des valeurs de $\varphi(x)$: on a

$$f(x) > \frac{m}{(b-x)^n}$$

$$\int_h^{b-\varepsilon} f(x)\,dx > m\int_h^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^n}$$

$$> \frac{m}{n-1}\left\{\frac{1}{(b-h)^{n-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\right\}$$

n étant plus grand que 1, le 2^d. membre augmente indéfiniment.

Enfin, si $n=1$, on trouve

$$\int_h^{b-\varepsilon} f(x)\,dx > m\,\mathcal{L}\frac{b-h}{\varepsilon}$$

quantité qui devient encore infinie.

Les résultats seraient les mêmes si $f(x)$ devenait infini pour $x=a$.

Soit par exemple

$$\int_0^b \frac{\sin x\,dx}{x^{n+1}}$$

La fonction $\frac{\sin x}{x^{n+1}}$ devient infinie pour $x=0$; car on peut l'écrire $\frac{1}{x^n}\frac{\sin x}{x}$. — Si d'abord $n<1$:

$$\int_\varepsilon^b \frac{\sin x\,dx}{x^{n+1}} < \int_\varepsilon^b \frac{dx}{x^n} \quad \text{ou que} \quad \frac{1}{1-n}\left\{b^{1-n}-\varepsilon^{1-n}\right\}$$

donc l'intégrale est finie. — Si $n>1$, posons $\frac{\sin b}{b}=m$, nous aurons

$$\int_\varepsilon^b \frac{\sin x\,dx}{x^{n+1}} > \int_\varepsilon^b \frac{m\,dx}{x} \quad \text{ou que} \quad m\,\mathrm{l}\,\frac{b}{\varepsilon}$$

quantité qui augmente indéfiniment.

Soit $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(b)$ étant infini : nous avons défini cette intégrale la limite de $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ quand ε tend vers zéro. Or, dans le cas de $n<1$, si l'on prend au lieu de cette limite celle de

$$\int_a^{b-\mu\varepsilon} f(x)\,dx$$

on trouve la même valeur pour l'intégrale. Cela tient à ce que

$$\lim. \int_{b-\varepsilon}^{b-\mu\varepsilon} f(x)\,dx = 0$$

En effet, $f(x)$ peut s'écrire $\frac{(x-b)\,f(x)}{x-b}$. Donc

$$\int_{b-\mu\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_{b-\mu\varepsilon}^{b-\varepsilon} (x-b)\,f(x)\,\frac{dx}{x-b}$$

Soit ξ une valeur moyenne entre $b-\varepsilon$ et $b-\mu\varepsilon$. L'intégrale peut s'écrire

$$(\xi-b)\,f(\xi)\int_{b-\mu\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{dx}{x-b}$$

Mais

$$\int \frac{dx}{x-b} = \mathcal{L}(x-b) \quad \text{et} \quad \int_{b-\mu\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{dx}{x-b} = \mathcal{L}\mu$$

Donc

$$\int_{b-\mu\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = (\xi - b)\, f(\xi)\, \mathcal{L}\mu \qquad (a)$$

or, quand ε tend vers zéro, ξ se rapproche de la limite b, et se confond avec elle, $f(\xi)$ devient infini. Nous avons donc pour second membre le produit

$$0 \times \infty \times \mathcal{L}\mu$$

Mais nous avons admis que $f(x)$ était de la forme

$$\frac{\varphi(x)}{(b-x)^n} \qquad n < 1$$

lors donc que l'on fera $x = \xi$, il restera

$$(\xi - b)^{1-n}\, \varphi(\xi)$$

quantité nulle pour $\xi = b$. ainsi l'intégrale

$$\int_{b-\mu\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

est nulle à la limite.

Mais si $n \geq 1$, il n'est plus permis de substituer à la limite de $\int_a^{b-\varepsilon}$ celle de $\int_a^{b-\mu\varepsilon}$. car alors

$$\int_{b-\mu\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \neq 0$$

La considération de l'égalité (a) fait voir que, dans le cas de $n = 1$, cette intégrale se réduit à $k\,\mathcal{L}\mu$, k étant une constante, et que, pour $n > 1$, cette même intégrale croît au delà de toutes

limites.

Mr. Cauchy a désigné ces intégrales par le nom d'Intégrales Singulières. — En général, $f(x)$ restant fini, l'intégrale

$$\int_{b-\mu\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

est nulle à la limite : car elle ne se compose que d'un seul élément. Mais cette intégrale n'est pas nulle dans tous les cas, et devient intégrale singulière quand $f(x)$ devient infini pour une des limites.

Soient a, c, b trois quantités rangées par ordre de grandeur croissante, et supposons que $f(c) = \infty$. On appelle **valeur principale** de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ la limite, si elle existe, de

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

une telle intégrale se compose de la somme de deux intégrales semblables à celles qui ont été traitées plus haut : elle aura donc une valeur finie dans le cas où, $f(x)$ étant de la forme $\frac{\varphi(x)}{(c-x)^n}$, n sera <1, et infinie pour $n \geq 1$

Soit par exemple

$$\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x}$$

La fonction $\frac{1}{x}$ devient infinie pour $x = 0$. Donc

$$\int_{-a}^{b} \frac{dx}{x} = \operatorname{Lim}\left[\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{x}\right]$$

La seconde intégrale du 2e. membre a pour valeur

$$Lb - L\varepsilon$$

Quant à la 1ère, on pose, pour éviter les logarithmes imaginaires, $x = -z$, et par suite

$$\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} = \int_{+a}^{+\varepsilon} \frac{dz}{z} = L\varepsilon - La$$

ajoutant ces deux intégrales

$$\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = Lb - La = L\frac{b}{a}$$

quantité finie.

Mr. Cauchy a fait remarquer qu'il y a lieu de considérer la valeur générale de cette intégrale, savoir

$$\lim \left\{ \int_a^{c-\mu\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\nu\varepsilon}^{b} f(x)dx \right\}$$

Cette limite peut en effet, lorsque les deux parties sont infinies, différer de la 1ère limite : elle contient de plus deux intégrales définies singulières

$$\int_{c-\mu\varepsilon}^{c-\varepsilon} f(x)dx \quad \text{et} \quad \int_{c+\varepsilon}^{c+\nu\varepsilon} f(x)dx$$

qui ne sont pas nécessairement nulles. — on peut le vérifier sur l'exemple précédent.

Calcul par approximation des Intégrales Définies.

Ce calcul repose sur le théorème qu'une Intégrale définie est égale à la somme de ses éléments. Car il en résulte que l'on peut prendre pour valeur approchée de l'intégrale $\Sigma f(x)\Delta x$, ce qui serait rigoureusement vrai si Δx était infiniment petit. Cette approximation revient à prendre, au lieu de l'aire elle-même, la somme des rectangles construits sur les ordonnées élevées à des distances Δx l'une de l'autre, et menant par l'extrémité de chacune d'elles une parallèle aux x jusqu'à la rencontre de la suivante.

On aura une autre valeur approchée de l'Intégrale en prenant la somme des rectangles extérieurs. Si l'on désigne par $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ les divisions faites sur l'axe des x entre les abscisses extrêmes a et b, cette somme aura pour expression

$$f(a+\alpha_1)\alpha_1 + f(a+\alpha_1+\alpha_2)\alpha_2 + \cdots + f(a+\alpha_1+\cdots+\alpha_n)\cdot\alpha_n$$

Le dernier terme est $f(b)\,\alpha_n$.

Enfin on aura une approximation plus grande en prenant la somme des trapèzes construits en joignant les extrémités des ordonnées successives. Elle aura évidemment pour expression

$$\frac{\alpha_1}{2}\left\{f(a)+f(a+\alpha_1)\right\} + \frac{\alpha_2}{2}\left\{f(a+\alpha_1)+f(a+\alpha_1+\alpha_2)\right\} + \cdots$$

Les divisions $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ sont en général quelconques. — Si nous les supposons au contraire égales entre elles, de sorte que, h étant

l'une d'elles, on ait $nh = b - a$, la somme des trapezes deviendra

$$h\left\{ \frac{f(a)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + \frac{f(b)}{2} \right\}$$

et l'approximation sera d'autant plus grande que h sera moindre. — Il y a pourtant un inconvénient à prendre h trop petit : car le nombre des termes de la parenthèse augmente avec n, et en même temps s'accroît la difficulté du calcul.

On doit à Euler une formule qui permet de corriger celle que nous venons d'obtenir, pourvu que h ne soit pas trop petit.

En désignant par $F(x)$ l'intégrale de $f(x)\,dx$, nous avons par la formule de Taylor

$$F(a+h) - F(a) = h\,f(a) + \frac{h^2}{1.2} f'(a) + \dots$$

$$F(a+2h) - F(a+h) = h\,f(a+h) + \frac{h^2}{1.2} f'(a+h) + \dots$$

$$\dots$$

$$F(b) - F(a+\overline{n-1}\,h) = h\,f(a+(n-1)h) + \frac{h^2}{1.2} f'(a+(n-1)h) + \dots$$

Si nous faisons la somme de toutes ces égalités, le 1er. membre se réduit à $F(b) - F(a)$, c.a.d. à $\int_a^b f(x)\,dx$; et si pour abréger nous posons dans le second

$$S = f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(a+(n-1)h)$$

$$S' = f'(a) + f'(a+h) + f'(a+2h) + \dots + f'(a+(n-1)h)$$

$$\dots$$

Nous aurons

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\,S + \frac{h^2}{1.2} S' + \frac{h^3}{1.2.3} S'' + \dots \qquad (1)$$

à mesure que h sera plus petit, le calcul des sommes S, S', S''.. sera de plus en plus difficile. Il faut donc les remplacer

par des termes équivalents d'un calcul plus aisé.

Si nous répétons sur $f(x)$ les mêmes calculs que sur $F(x)$, nous aurons

$$f(b) - f(a) = h S' + \frac{h^2}{1.2} S'' + \frac{h^3}{1.2.3} S''' + \cdots \qquad (2)$$

de même

$$f'(b) - f'(a) = h S'' + \frac{h^2}{1.2} S''' + \frac{h^3}{1.2.3} S^{IV} + \cdots \qquad (3)$$

$$f''(b) - f''(a) = h S''' + \frac{h^2}{1.2} S^{IV} + \frac{h^3}{1.2.3} S^{V} + \cdots \qquad (4)$$

$\cdots$

Maintenant, je fais la somme des égalités (1), (2), (3), (4)... après avoir multiplié la seconde par λh, la 3e. par $\lambda' h^2$, la 4e. par $\lambda'' h^3$, .. et j'obtiens

$$\int_a^b f(x)dx + \lambda h \{f(b) - f(a)\} + \lambda' h^2 \{f'(b) - f'(a)\} + \lambda'' h^3 \{f''(b) - f''(a)\} + \cdots = hS + h^2 S'\left(\frac{1}{1.2} + \lambda\right) + h^3 S''\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{\lambda}{1.2} + \lambda'\right) + \cdots$$

Pour utiliser cette formule, on négligera toutes les puissances de h (x) qui dépassent la 4e. par exemple : puis on disposera des indéterminées $\lambda, \lambda', \lambda''$ ... de manière à faire évanouir toutes les puissances qui y figurent encore, hors la 1re. Nous poserons donc

(x) dans le second membre

$$(A) \qquad \frac{1}{1.2} + \lambda = 0 \quad \Big| \quad \frac{1}{1.2.3} + \frac{\lambda}{1.2} + \lambda' = 0 \quad \Big| \quad \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{\lambda}{1.2.3} + \frac{\lambda'}{1.2} + \lambda'' = 0$$

d'où l'on déduit

$$\lambda = -\frac{1}{2} \qquad \lambda' = \frac{1}{12} \qquad \lambda'' = 0$$

substituant, et isolant l'intégrale cherchée, on a

$$\int_a^b f(x)dx = h\left[\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + \cdots + f(a+(n-1)h) + \frac{f(b)}{2}\right] - \frac{h^2}{12}\left[f'(b) - f'(a)\right]$$

Le 1er terme de cette $\neq$ valeur est précisément la somme des trapèzes que nous avons déjà trouvée plus haut. — Le terme de correction est d'ailleurs très-simple, puisqu'il ne se compose que d'un binôme facile à calculer. — L'approximation est d'ailleurs très-grande,

puisque, λ'' étant nul, le terme suivant en h^3 disparaît.

Pour trouver les quantités $\lambda, \lambda', \lambda''$.. nous avons résolu les Équations (A). Mais cette résolution serait très-pénible si l'on voulait pousser plus loin l'approximation : et d'ailleurs elle ne met pas en lumière la loi de formation de ces indéterminées, lesquelles sont indépendantes de la forme particulière de la fonction. Parmi les fonctions propres à leur détermination, on a pris l'exponentielle, qui se reproduit indéfiniment par les différentiations successives. — on pose donc

$$\int_a^b f(x)\,dx = e^b - e^a \qquad f(x) = e^x$$

Dans ce cas particulier, nous avons

$$S = e^a\left(1 + e^h + e^{2h} + \cdots + e^{(n-1)h}\right) = \frac{e^a\left(e^{b-a} - 1\right)}{e^h - 1} = \frac{e^b - e^a}{e^h - 1}$$

on aurait la même valeur pour S', S''.. etc. Substituant dans la formule trouvée tout-à-l'heure, et nous rappelant que tous les termes du 2^d. membre, à l'exception du 1er, doivent avoir leurs coefficients nuls, nous aurons

$$\left(e^b - e^a\right)\left[1 + \lambda h + \lambda' h^2 + \cdots + \lambda^{n-1} h^n\right] = h\,\frac{e^b - e^a}{e^h - 1}$$

simplifiant

$$\frac{h}{e^h - 1} = 1 + \lambda h + \lambda' h^2 + \cdots + \lambda^{n-1} h^n$$

Le 1er. membre est indépendant des indéterminées $\lambda, \lambda', \lambda''$... En le développant suivant les puissances de h, et identifiant ensuite ce développement avec le second membre, on aura des Équations dont chacune ne contiendra qu'une inconnue, de sorte que ces inconnues seront ainsi déterminées. — Si nous profitons de la valeur connue de λ, $\lambda = -\frac{1}{2}$, en faisant

passer λh dans le 1er. membre, il deviendra

$$\frac{h}{e^h-1}+\frac{h}{2}=\frac{h}{2}\left\{1+\frac{2}{e^h-1}\right\}=\frac{h}{2}\,\frac{e^h+1}{e^h-1}=\frac{h}{2}\,\frac{e^{\frac{h}{2}}+e^{-\frac{h}{2}}}{e^{\frac{h}{2}}-e^{-\frac{h}{2}}}$$

Ce terme ne change pas quand on remplace h par $-h$, et réciproquement. Le développement ne doit donc contenir que des puissances paires de h ; les coefficients λ'', λ^{iv}, .. doivent être nuls : ce que nous avions déjà observé pour λ''..

Intégration

par le développement en séries.

---

§ 13. Si une série $a_1\ a_2 \dots a_n$ de termes tous fonctions d'x, est convergente pour toute valeur de x comprise entre a et x, la série des intégrales des différents termes multipliés chacun d par dx, est convergente, et aura pour somme l'intégrale de la série proposée.

Soit

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \rho_n$$

et

$$S\,dx = a_1\,dx + a_2\,dx + a_3\,dx + \dots + a_n\,dx + \rho_n\,dx$$

En intégrant

$$\int_a^x S\,dx = \int_a^x a_1\,dx + \int_a^x a_2\,dx + \dots + \int_a^x a_n\,dx + \int_a^x \rho_n\,dx$$

Soit M_n la plus grande valeur de ρ_n lorsque x varie de a à x.

$$\int_a^x \rho_n\,dx < M_n \int_a^x dx < M_n\,(x-a)$$

Il suit de là, M_n pouvant être rendu moindre que toute quantité donnée puisque la série est convergente, que le terme complémentaire de la série des intégrales peut décroître lui-même au dessous de toute grandeur donnée. Cette seconde série est donc aussi convergente, et elle a pour somme $\int_a^x S\,dx$

c. q. f. d.

Supposons que la série proposée soit convergente pour $x=a$, et pour toute valeur de x comprise entre a et b, mais ne le soit plus pour $x=b$: on n'en aura pas moins

$$\int_a^b S\,dx = \int_a^b a_1\,dx + \int_a^b a_2\,dx + \cdots$$

toutes les fois que la série représentée par le second membre sera convergente. — La série

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots = \frac{1}{1+x}$$

est un exemple de ce cas. En effet, elle est convergente pour $x<1$, divergente pour $x=1$, tandis que la série des intégrales

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

est encore convergente pour $x=1$ et représente encore $\int \frac{dx}{1+x}$ ou $L(1+x)$ pour $x=1$, c.à.d. $L.2$.

Pour démontrer cette proposition, j'observe que, quelque petit que soit ε, on a toujours

$$\int_a^{b-\varepsilon} S\,dx = \int_a^{b-\varepsilon} a_1\,dx + \int_a^{b-\varepsilon} a_2\,dx + \cdots$$

et les deux membres ayant constamment les mêmes valeurs à mesure que ε décroît, sont encore égaux à la limite lorsque ε est nul c.q.f.d.

De ce que la série des intégrales est convergente, on ne peut pas évidemment en conclure qu'il en est de même de la série des dérivées. — Ainsi la série ci-dessus le prouve. — Supposons encore que le terme complémentaire de la série des intégrales soit $\frac{\sin nx}{n}$: celui de l'autre série serait $\cos nx$, qui ne décroît pas indéfiniment lorsque n augmente.

Voyons maintenant comment cette théorie pourra nous mener à une valeur approchée d'une intégrale donnée $\int_a^b f(x)\,dx$.

développons $f(x)$ par la série de Taylor. Nous aurons

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \dots \frac{(x-a)^n}{1.2\dots n} f^n(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{1.2\dots(n+1)} f^{n+1}(a+\theta(x-a))$$

Multiplions par dx et intégrons :

$$\int_a^x f(x)\,dx = (x-a)f(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f'(a) + \frac{(x-a)^3}{1.2.3} f''(a) + \dots$$

$$+ \frac{(x-a)^{n+1}}{1.2\dots(n+1)} f_n(a) + \frac{1}{1.2\dots(n+1)} \int_a^x f_{n+1}(a+\theta(x-a)).(x-a)^{n+1}\,dx$$

on peut trouver deux limites de l'erreur au moyen de la dernière intégrale. Soit M plus grand que la plus grande valeur que prend $f_{n+1}(x)$ entre $x=a$ et $x=x$: l'erreur sera moindre que

$$\frac{M}{1.2.3\dots(n+1)} \frac{(x-a)^{n+2}}{n+2}$$

on aura de même pour minimum de l'erreur

$$\frac{m}{1.2.3\dots(n+1)} \frac{(x-a)^{n+2}}{n+2}$$

Si, dans la formule précédente, on fait $a=0$, on aura une application de la série de Maclaurin. Cette nouvelle formule, il est vrai, sera moins générale et plus sujette à tomber en défaut que la 1ère.

L'intégration par parties peut conduire à la formule de Taylor, déjà obtenue par d'autres considérations.

Nous avons en effet

$$f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} f'(x')\,dx'$$

Simplifions les limites en posant $x' = x+h-z$: faire $x'=x$ reviendra à faire $h=z$, égaler x' à $x+h$ reviendra à faire $z=0$. D'ailleurs on aura $dx = -dz$. Nous aurons donc

$$\int_x^{x+h} f'(x')\,dx' = -\int_h^0 f'(x+h-z)\,dz = \int_0^h f'(x+h-z)\,dz$$

Maintenant le procédé d'intégration par parties nous donnera, d'abord pour l'intégrale indéfinie,

$$\int f'(x+h-z)\,dz = z\, f'(x+h-z) + \int f''(x+h-z)\, z\,dz$$

$$\int f''(x+h-z)\, z\,dz = \frac{z^2}{1.2} f''(x+h-z) + \frac{1}{1.2}\int z^2 f'''(x+h-z)\,dz$$

$$\frac{1}{1.2}\int f'''(x+h-z)\, z^2\,dz = \frac{z^3}{1.2.3} f'''(x+h-z) + \frac{1}{1.2.3}\int z^3 f^{IV}(x+h-z)\,dz$$

et ainsi de suite, de sorte que, en faisant la somme de ces égalités, nous aurons

$$\int f'(x+h-z)\,dz = z\, f'(x+h-z) + \frac{z^2}{1.2} f''(x+h-z) + \frac{z^3}{1.2.3} f'''(x+h-z) + \cdots$$
$$+ \frac{z^n}{1.2\ldots n} f_n(x+h-z) + \frac{1}{1.2\ldots(n+1)}\int z^n f_{n+1}(x+h-z)\,dz$$

Maintenant, pour avoir l'intégrale ~~ind~~ définie entre les limites 0 et h, il faut faire successivement $z=0$ et $z=h$, et retrancher le 2d. résultat du 1er. Nous obtenons ainsi

$$f(x+h) - f(x) = h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \cdots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f_n(x) + \frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^h z^n f_{n+1}(x+h-z)\,dz$$

Nous retombons ainsi sur la formule de Taylor, au dernier terme près qui se trouve ici être une intégrale. Mais il est facile de le ramener à la forme ordinaire. Soient M et m la plus grande et la plus petite valeur de $f_{n+1}(x+h-z)$, on a alors

$$\frac{m\, h^{n+1}}{n+1} < \int_0^h f_{n+1}(x+h-z)\, z^n\,dz < \frac{M\, h^{n+1}}{n+1}$$

par suite, si f_{n+1} est continue, le terme complémentaire sera

$$\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f_{n+1}(x+\theta h)$$

L'intégration par parties conduit encore à une série connue sous le nom de Série de J. Bernouilli. — En effet

$$\int f(x)\,dx = x\,f(x) - \int x\,f'(x)\,dx$$

$$\int x\,f'(x)\,dx = \frac{x^2}{1.2}\,f'(x) - \frac{1}{1.2}\int x^2 f''(x)\,dx$$

$$\frac{1}{1.2}\int x^2 f''(x)\,dx = \frac{x^3}{1.2.3}\,f''(x) - \frac{1}{1.2.3}\int x^3 f'''(x)\,dx$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{1.2..(n-1)}\int x^{n-1} f^{n-1}(x)\,dx = \frac{x^n}{1.2..n}\,f^{n-1}(x) - \frac{1}{1.2..n}\int x^n f^{n}(x)\,dx$$

Changeons les signes des deux membres des Eq. d'ordre pair, et ajoutons :

$$\int f(x)\,dx = x\,f(x) - \frac{x^2}{1.2}\,f'(x) + \frac{x^3}{1.2.3}\,f''(x) \cdots \pm \frac{x^n}{1.2..n}\,f^{n-1}(x) \mp \frac{1}{1.2..n}\int x^n f^n(x)\,dx$$

Prenons maintenant l'intégrale entre 0 et x ; nous aurons

$$\int_0^x f(x)\,dx = x\,f(x) - \frac{x^2}{1.2}\,f'(x) + \frac{x^3}{1.2.3}\,f''(x) \cdots \pm \frac{1}{1.2..n}\,f^{n-1}(x) \mp \frac{1}{1.2..n}\int_0^x x^n f^n(x)\,dx$$

L'intégrale complémentaire pourra d'ailleurs prendre la forme

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}\,f^n(\theta x)$$

La série de Bernouilli fournit un moyen de plus pour le développement des fonctions en série. En effet, je suppose que l'on veuille développer $f(x)$. on posera

$$f(x) = \int_0^x f'(x)\,dx + C$$

ce qui est permis en posant $C = f(0)$: car $\int_0^x f'(x)\,dx = f(x) - f(0)$.
or la série de Bernouilli nous donne précisément le développement de cette intégrale.

Cette même transformation sera utile encore toutes les fois que nous ne saurons pas développer la fonction elle-même, tandis

que sa dérivée est d'un développement facile. — Soit proposé de développer $L(1+x)$. La dérivée de cette fonction est $\frac{1}{1+x}$, et par la division nous obtenons immédiatement

$$(a) \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \pm x^{n-1} \mp \frac{x^n}{1+x}$$

or $L(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x}$, et je n'ajoute pas de constante, car, pour $x=0$, $L(1+x)$ est nul. Donc

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \pm \frac{x^n}{n} \mp \int_0^x \frac{x^n dx}{1+x}$$

La série (a) est convergente quand x est compris entre 0 et 1 ; il en est donc de même de la série des intégrales ; d'où il est permis d'écrire

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \pm \frac{x^n}{n} \mp \cdots$$

x étant compris entre 0 et 1, $\frac{x^n}{1+x}$ est $< x^n$. Donc

$$\int_0^x \frac{x^n dx}{1+x} < \int_0^x x^n dx < \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

telle est la limite supérieure de l'erreur commise lorsqu'on s'arrête au terme de rang n. On voit qu'elle est une fraction du terme suivant. D'ailleurs elle est positive ou >0 ; on en a donc aussi une limite inférieure.

Cette méthode s'emploiera avec succès toutes les fois que la dérivée sera d'une forme plus simple que la fonction elle-même. Soit par exemple $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$; sa dérivée est $\frac{1}{1+x^2}$, et

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \pm x^{2n}$$

et l'intégration donne

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \pm \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \mp \int_0^x \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$

Ce terme complémentaire est celui que donne le développement de $\frac{1}{1+x^2}$ par simple division ; comme il est moindre que $\frac{x^{2n+3}}{2n+3}$, cette quantité est une limite supérieure de l'erreur.

Nous pourrons de même développer arc sin x, dont la dérivée est

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{ou} \quad (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

La formule du binôme nous donne

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}x^{2n} + \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}\frac{\theta^{n+1}x^{2n+2}}{(1-\theta x^2)^{\frac{2n+3}{2}}}$$

série convergente tant que $x<1$. En multipliant chaque terme par dx et intégrant, on a

$$\arcsin x = x + \frac{1}{1.2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}\theta^{n+1}\int_0^x \frac{x^{2n+2}\,dx}{(1-\theta x^2)^{\frac{2n+3}{2}}}$$

Si nous voulons trouver une limite du terme complémentaire, nous observerons que x variant de 0 à x, et θ étant <1, le dénominateur sera le plus petit possible quand $\theta=1$ et $x=x$. alors

$$\text{erreur} < \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}\;\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{2n+3}{2}}}\cdot\frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

Si, dans la formule de arc sin x, nous faisons $x=\frac{1}{2}$, l'arc correspondant sera $\frac{\pi}{6}$. donc

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} + \cdots$$

valeur très convergente.

Applications Géométriques.

Quadrature et Rectification des Courbes.

Nous avons déjà expliqué comment l'espace compris entre deux ordonnées d'une courbe, cette courbe et l'axe des x, est représenté par

$$\int_a^b y\,dx.$$

Il peut arriver que $\int_p^q x\,dy$ soit d'une intégration plus facile que $\int_a^b y\,dx$. On pourra alors chercher la 1ère intégrale : la seconde s'en déduira facilement.

L'intégration par parties donne

$$\int y\,dx = xy - \int x\,dy$$

Supposons $\int y\,dx = F(x) + C$ et $\int x\,dy = \varphi(y) + C$. L'égalité précédente s'écrira

$$F(x) = xy - \varphi(y) + C$$

Pour avoir l'intégrale entre les limites a et b, nous devons faire successivement dans cette équation $x = a$ et $y = p$, $x = b$ et $y = q$, et retrancher le 1er résultat du second. Nous trouvons ainsi

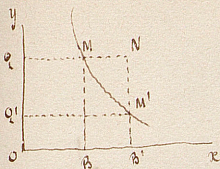
$$F(b) - F(a) = bq - ap - [\varphi(q) - \varphi(p)]$$

ce que l'on écrit ainsi

$$\int_a^b y\,dx = (xy)_a^b - \int_p^q x\,dy$$

Ce résultat est susceptible d'une interprétation géométrique qui le fera mieux comprendre.

En effet :



$$\int_a^b y\,dx \text{ représente le rectangle } BN \text{, moins } MM'N$$

$$-\int_p^q x\,dy \quad \text{"} \quad \text{"} \quad Q'N \text{, moins } MM'N$$

Donc

$$\int_a^b y\,dx = BN - Q'N - \int_p^q x\,dy$$

or $BN = (b-a)p$ $\quad Q'N = (p-q)b$ $\quad BN - Q'N = bq - ap$. c'est donc précisément $(xy)_a^b$: ce qui démontre la formule, en même temps que l'on en découvre nettement la signification.

Quadrature de quelques courbes particulières.

1°. Courbes Paraboliques.

$$y^m = p x^n$$

m et n étant supposés entiers et positifs.
on en déduit

$$y = p^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n}{m}}$$

$$y\,dx = p^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n}{m}} dx$$

et par suite

$$\int y\,dx = \frac{m p^{\frac{1}{m}}}{m+n} x^{\frac{m+n}{m}} + C$$



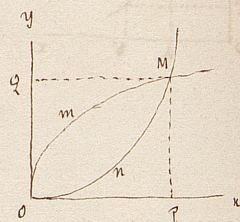
Si l'on veut que le segment commence en O, il faut prendre l'intégrale entre les limites 0 et x. Pour $x=0$, l'intégrale est nulle, donc $C=0$, et l'on obtient

$$\int_0^x y\,dx = \frac{m p^{\frac{1}{m}}}{m+n} x^{\frac{m+n}{m}} = \frac{m}{m+n} xy$$

Cette expression de l'aire OMP fait voir que si l'on construit le rectangle ONMP, les deux aires de ce rectangle et de la courbe

seront dans un rapport constant. Dans la parabole ordinaire, où $m=2$, $n=1$, on voit que l'aire de la courbe est le tiers de celle du rectangle.

Supposons deux paraboles ordinaires égales, l'une $y^2=2px$, l'autre $x^2=2py$. Il est facile de voir que la feuille OmnM est le tiers du rectangle OPMQ. D'ailleurs l'expression de sa surface est facile à trouver. — Les coordonnées de M sont



$$x = 2p \qquad y = 2p$$

Le rectangle a pour surface $4p^2$, par suite l'aire de la feuille est $\frac{4}{3}p^2$.

Cette aire peut aussi se trouver directement en la considérant comme la limite de la somme des rectangles élémentaires construits sur la différence des ordonnées des deux courbes. Nous aurons en effet ainsi :

$$\text{aire } OmnM = \int_0^x (y-y')\,dx$$

formule générale de la différence des aires de deux courbes quelconques.

Rem. — Nous venons de trouver que l'aire des courbes paraboliques est de la forme kxy. On peut démontrer que ces courbes sont les seules dont l'aire est ait un rapport constant avec le rectangle construit sur les coordonnées limites. — Soit en effet

$$u = kxy$$

d'où

$$du = kx\,dy + ky\,dx$$

Mais $du = y\,dx$

$$y\,dx = kx\,dy + ky\,dx$$

$$(k-1)\,y\,dx = -kx\,dy$$

$$(k-1)\,\frac{dx}{x} = -k\,\frac{dy}{y}$$

En intégrant

$$(k-1)\,\mathcal{L}x = -k\,\mathcal{L}y + \mathcal{L}p$$

$$\mathcal{L}\left(x^{k-1}\right) = -\mathcal{L}\left(\frac{y^k}{p}\right).$$

et si nous supposons $k<1$,

$$\mathcal{L}\left(x^{1-k}\right) = \mathcal{L}\,\frac{y^k}{p}$$

$$y^k = p\,x^{1-k}$$

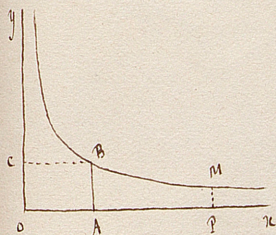
éq. des courbes paraboliques.

2°. Courbes hyperboliques:

$$x^m y^n = p$$

$$\int_a^x y\,dx = \int_a^x p^{\frac{1}{n}} x^{-\frac{m}{n}}\,dx = \frac{n\,p^{\frac{1}{n}}}{n-m}\left(x^{\frac{n-m}{n}} - a^{\frac{n-m}{n}}\right)$$

Il faut discuter suivant que $n>m$, $n=m$, $n<m$.



Premier cas. — $n>m$. — L'aire asymptotique ABMP croît en même temps que x, et devient infinie avec lui. au contraire, l'aire comprise entre l'axe des y, la courbe, et l'ordonnée AB, aire que l'on obtient en laissant x fixe, et faisant converger a vers zéro, tend vers une limite finie

$$S = \frac{n\,p^{\frac{1}{n}}}{n-m}\,x^{\frac{n-m}{n}} = \frac{n}{n-m}\,xy$$

x et y étant les coordonnées fixes OA et AB. on voit donc que l'aire asymptotique OABy est dans un rapport constant avec le rectangle OABC.

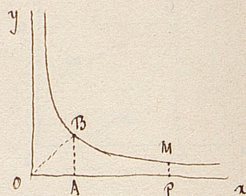
Deuxième cas. — $n=m$. Dans ce cas, la formule générale se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. C'est qu'alors en effet l'intégration n'est plus possible comme nous l'avons exécutée; alors

l'Eq. de la courbe est celle de l'hyperbole Equilatère

$$xy = p^{\frac{1}{n}} \qquad y = p^{\frac{1}{n}}\frac{1}{x}$$

$$p^{\frac{1}{n}}\int_a^x \frac{dx}{x} = p^{\frac{1}{n}}\left(Lx - La\right)$$

Supposons $p=1$, et prenons pour limite inférieure a l'abscis-se $x=1$, à laquelle correspond $y=1$, par conséquent l'abscisse du sommet B. Nous aurons



$$\text{aire } ABMP = L.\,OP$$

D'où ce Théorème : Les abscisses croissant en progression Géométri-que, les abscisses croissent en progression arithmétique. – C'est à cause de cette propriété de représenter les l'aire d'une hyperbole que les Logarithmes Népériens sont nommés parfois Logarithmes Hyperboliques. – Il est aisé de comprendre le vice de cette dénomination, dès qu'l'on observe que les logarithmes d'un système quelconque peuvent toujours représenter l'aire d'une hyperbole, et même d'une Infinité d'hyperboles. Car :

Soit $xy = p$ l'Eq. de l'hyperbole rapportée à des axes obliques sous l'angle θ : l'aire hyperbolique terminée d'une part à l'abscisse $x=1$ et de l'autre à $x=x$, sera

$$p \sin\theta\, Lx$$

et nous voulons avoir

$$p\sin\theta\, Lx = \operatorname{Log} x$$

Si M est le module :

$$p\sin\theta = \frac{\operatorname{Log} x}{Lx} = M$$

$$\sin\theta = \frac{M}{p}$$

Il suffira donc, pour avoir une hyperbole satisfaisant à la condition voulue, de prendre $p > M$. Dans le système vulgaire, on a

$M = 0,4342945..$ on pourra prendre par conséquent $p = 1$ et $\sin\theta = M$: c.à.d. que les asymptotes de l'hyperbole $xy = 1$ dont les aires représentent les logarithmes vulgaires font entre elles un angle dont le sinus est $0,4342945..$ ou environ $31°\ 28'$. Si l'on prenait $p = M$, on aurait $\theta = 90°$: l'hyperbole serait équilatère.

Troisième cas. — $n < m$. — Nous obtiendrons dans ce cas des résultats précisément inverses de ceux que nous a fournis la première hypothèse $n > m$. L'aire asymptotique comprise entre la courbe et l'axe des x sera finie, et celle comprise entre la courbe et l'axe des y sera au contraire infinie. La raison de cette différence se trouve dans le plus ou moins de rapidité avec laquelle la courbe se rapproche de son asymptote.

3°. Cercle.

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\int_a^l y\,dx = \int_a^l dx\sqrt{R^2 - x^2}$$

En général on a

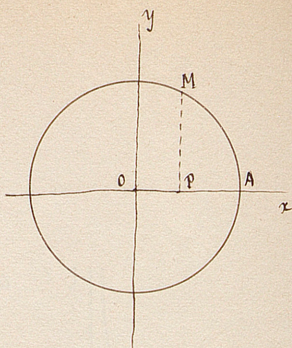
$$\int dx\sqrt{R^2 - x^2} = x\sqrt{R^2 - x^2} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$= x\sqrt{R^2 - x^2} - \int \frac{(R^2 - x^2)\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} + \int \frac{R^2\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$\int dx\sqrt{R^2 - x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2}\int \frac{\frac{dx}{R}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}}$$

La dernière intégrale est $\text{arc} \sin \frac{x}{R}$. Donc

$$\int dx\sqrt{R^2-x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2} + \frac{R^2}{2}\,\text{arc}\sin\frac{x}{R}$$



Si nous voulons avoir l'aire AMP, nous intégrerons entre les limites x et R, et nous aurons

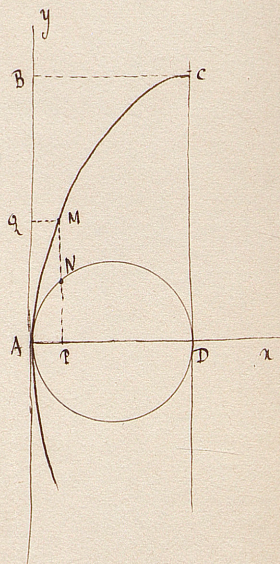
$$\text{aire } AMP = -\frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2} + \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc}\sin\frac{x}{R}\right)$$

$$= -\frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2} + \frac{R^2}{2}\,\text{arc}\cos\frac{x}{R}$$

ainsi le calcul intégral, aussi bien que la Géométrie élémentaire, donne l'aire du cercle en fonction de la circonférence du cercle de rayon 1. Et l'on ne peut en obtenir qu'une valeur approchée au moyen des séries.

4°. Ellipse. (voir Duhamel).

5°. Cycloïde.



Cette courbe étant rapportée à son sommet, son équation différentielle est

$$dy = \sqrt{\frac{2a-x}{x}}\,dx$$

Nous emploierons ici la formule

$$\int_a^b y\,dx = (xy)_a^b - \int_a^b x\,dy$$

et pour avoir l'aire AMP, nous prendrons pour limites 0 et x. — D'abord, $(xy)_0^x$ sera xy, puisque ce rectangle est nul pour $x=0$, et nous avons

$$\text{aire } AMP = xy - \int_0^x dx\sqrt{2ax-x^2}$$

au lieu de chercher à déterminer cette intégrale, on compare l'aire AMP à la surface ANP du segment correspondant

Dans le cercle, dont l'Eq. est

$$y^2 - 2ax + x^2 = 0$$

$$\text{aire } ANP = \int_0^x dx\sqrt{2ax - x^2}$$

De là

$$\text{aire } AMP = -\text{ aire } ANP + xy$$

$$= AQMP - \text{aire } ANP$$

D'où l'on conclut encore que ANP est égale au triangle mixti-ligne AMQ.

D'après cela, l'aire de la Demi-Cycloïde ACD est égale au rectangle ABCD, diminué du Demi-cercle AND, ou bien à $2\pi a^2 - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3}{2}\pi a^2$

Si l'on considère la cycloïde entière, elle aura pour surface $3\pi a^2$; le cercle total décrit sur AD en est donc le tiers, et divise sa surface en trois parties équivalentes.

---

aire d'une Courbe en Coordonnées Polaires.

on a en Général

$$du = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

d'où

$$u = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2 d\theta$$

1°. Spirales. – Soit en Général

$$r = a\,\theta^m$$

on aura

$$u = \frac{a}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \theta^{2m} d\theta = \frac{a^2}{2(2m+1)}\left[\theta_1^{2m+1} - \theta_0^{2m+1}\right]$$

Dans la Spirale d'Archimède, $m=1$, et l'équation devient

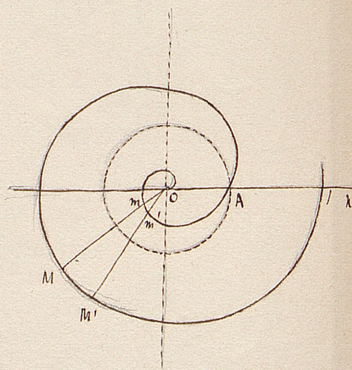
$$r = a\theta$$

En outre, nous posons pour plus de simplicité $a = \frac{1}{2\pi}$, et alors la spirale, après une 1ère révolution, vient couper l'axe polaire au même point A que le cercle de rayon 1. — L'aire de cette spirale comprise entre deux rayons faisant avec OA les angles θ_0 et θ_1 est exprimée par

$$u = \frac{1}{24\pi^2}\left(\theta_1^3 - \theta_0^3\right)$$

et si l'on suppose l'aire terminée d'une part à l'axe polaire,

$$u = \frac{1}{24\pi^2}\,\theta^3$$



après une 1ère révolution, lorsque $\theta = 2\pi$, l'aire décrite par le rayon vecteur est $\frac{1}{3}\pi$, c.à.d. le tiers du cercle OA, puisque OA = 1.

Dans la seconde révolution, le rayon vecteur repasse sur l'aire déjà décrite dans la 1ère, et ainsi de suite à chaque révolution : en sorte que pour exprimer seulement l'aire donnée par la m^e. révolution, il faut prendre d'abord l'intégrale $\frac{1}{2}\int r^2 d\theta$ entre les limites $2(m-1)\pi$ et $2m\pi$; ce qui donne

$$\frac{m^3 - (m-1)^3}{3}\pi$$

puis calculer l'aire terminée par la révolution suivante, ou la $(m+1)^e$, et, en retranchant, on aura pour l'espace compris entre les deux spires

$$\frac{(m+1)^3 - 2m^3 + (m-1)^3}{3}\pi = 2m\pi$$

ce qui revient à 2π quand $m=1$, et montre que l'espace compris entre la m^e. spire et la $(m+1)^e$ est égal à m fois l'espace compris entre les deux premières.

Soit demandée seulement l'aire MM'mm'. Cette aire peut être considérée comme la différence des deux secteurs OMM' et Omm': cherchons donc chacun d'eux. — Soit θ l'angle du rayon Om avec l'axe polaire, $\theta+\omega$ l'angle de Om'. Soit $R = OM$, et $r = Om$. — On aura pour élément de l'aire cherchée

$$\frac{1}{2}\left(R^2 - r^2\right) d\theta$$

Maintenant $R = \frac{1}{2\pi}\left(\theta + 2\pi\right)$, $r = \frac{1}{2\pi}\theta$. On substituera ces valeurs, et en intégrant entre les limites θ et $\theta+\omega$, on aura l'expression de la surface cherchée.

La transformation en coordonnées polaires permet d'évaluer facilement l'aire du folium de Descartes, à l'expression de laquelle on arriverait difficilement par les coordonnées rectilignes. — Son équation est

$$x^3 - axy + y^3 = 0$$

Nous posons

$$x = r \cos\theta$$

$$y = r \sin\theta$$

et il vient

$$r \cos^3\theta - a \sin\theta \cos\theta + r \sin^3\theta = 0$$

D'où

$$r = \frac{a \sin\theta \cos\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}$$

ou

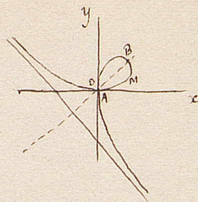
$$r = \frac{a \operatorname{tg}\theta}{\cos\theta\left(1 + \operatorname{tg}^3\theta\right)}$$

Par suite

$$u = \frac{a^2}{2}\int \frac{\operatorname{tg}^2\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta}}{\left[1 + \operatorname{tg}^3\theta\right]^2} = \frac{a^2}{6}\int \frac{3\, d.\operatorname{tg}\theta \times \operatorname{tg}^2\theta}{\left[1 + \operatorname{tg}^3\theta\right]^2}$$

L'intégrale de cette quantité est facile à apercevoir ; elle est

$$u = -\frac{a^2}{6}\,\frac{1}{(1+\operatorname{tg}^3\theta)} + C$$



Si nous voulons l'aire de la demi-feuille AMB, nous devrons prendre cette intégrale entre les limites 0 et $\frac{\pi}{4}$; ce qui nous donnera

$$u = -\frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{12}$$

et $\frac{a^2}{6}$ pour l'aire de la feuille entière.

Spirale Logarithmique. –

$$r = a^{\theta}$$

$$du = \tfrac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$u = \tfrac{1}{2}\int_{\theta}^{\theta'} a^{2\theta} d\theta = \frac{1}{4La}\left(a^{2\theta'} - a^{2\theta}\right)$$

Suivant que a est > ou < 1, la courbe tourne de droite à gauche ou de gauche à droite au-dessus de l'axe polaire en s'éloignant du pôle qui est un point asymptotique. – Cela posé, dans les deux cas, à partir d'un rayon quelconque, on peut considérer deux aires, l'une qui s'étend vers le point asymptote ; elle a constamment une valeur finie ; l'autre décrite par le rayon vecteur lorsque θ augmente, et qui croît au-delà de toute limite.

Rectification des Courbes.

---

on sait qu'on a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Par conséquent, pour rectifier une courbe, c.à.d. pour trouver

la longueur de l'arc de cette courbe entre deux points donnés, il suffira d'intégrer cette expression entre les deux limites assignées, après y avoir remplacé dy par sa valeur en fonction de dx tirée de l'Eq. de la Courbe.

Il pourra arriver qu'il soit plus commode d'exprimer x et y en fonction d'une inconnue auxiliaire u :

$$x = \varphi(u) \qquad y = \psi(u)$$

alors on aura

$$ds = du\sqrt{(\varphi'(u))^2 + (\psi'(u))^2}$$

1°. Ellipse. –

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

Pour avoir l'arc d'Ellipse à partir du sommet du petit axe, nous avons à trouver

$$\int_0^x dx\sqrt{1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}}$$

remplaçant y^2 par sa valeur $\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, il vient

$$\int_0^x dx\,\frac{\sqrt{a^2b^2(a^2-x^2) + b^4x^2}}{ab\sqrt{a^2-x^2}} = \int_0^x dx\sqrt{\frac{a^4 - (a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}}$$

$a^2 - b^2$ est le carré de la distance du centre au foyer. Représentons par e le rapport de cette distance au $\frac{1}{2}$ grand axe a, c.à.d. l'excentricité de l'ellipse, nous aurons pour l'arc

$$\int_0^x dx\sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}$$

quantité qu'on ne peut intégrer sous forme finie.

Soit M le point où se termine l'arc : et joignons ce point

au centre de l'ellipse. Si, sur le grand axe, nous décrivons un cercle, et si nous prolongeons OM jusqu'à ce cercle, nous aurons, en désignant par φ l'angle BOM :

$$x = a \sin\varphi$$

$$dx = a \cos\varphi \, d\varphi$$

et par la substitution de ces valeurs, l'intégrale devient

$$\int_0^\varphi a \cos\varphi \, d\varphi \sqrt{\frac{1 - e^2 \sin^2\varphi}{1 - \sin^2\varphi}}$$

ou

$$\int_0^\varphi a \, d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}$$

Nous pourrons obtenir au moyen des séries une valeur approchée de cette intégrale. — Si nous développons $a(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$ par la formule du binôme, la série sera convergente, car $e < 1$ et $\sin\varphi < 1$. Nous aurons ainsi

$$a(1 - e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = a\left[1 - \tfrac{1}{2}e^2\sin^2\varphi - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}e^4\sin^4\varphi - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{6}e^6\sin^6\varphi - \cdots\right]$$

on intégrera chaque terme multiplié par $d\varphi$, et l'on aura

$$s = a\left[\varphi - \tfrac{1}{2}e^2\int_0^\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}e^4\int_0^\varphi \sin^4\varphi\, d\varphi - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{6}e^6\int_0^\varphi \sin^6\varphi\, d\varphi - \cdots\right]$$

chacune de ces intégrales est de la forme

$$\int \sin^m\varphi \, d\varphi$$

et l'on sait que

$$\int \sin^m\varphi\, d\varphi = -\frac{\sin^{m-1}\varphi\cos\varphi}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2}\varphi\, d\varphi$$

Reste à substituer dans la série les valeurs des diverses intégrales, en faisant successivement dans cette formule $m = 2, 4, 6, \ldots$ puis à prendre les intégrales entre deux limites données.

Si nous voulons la longueur de l'arc compris entre les extrémités

du petit et du grand axe, nous intégrerons entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. La formule générale devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \varphi\, d\varphi = \frac{m-1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}\varphi\, d\varphi = \frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-3}{m-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-4}\varphi\, d\varphi = \dots$$

et, comme m est pair, on arrivera à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \varphi\, d\varphi = \frac{(m-1)(m-3)(m-5)\cdots 1}{m(m-2)(m-4)\cdots 2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{(m-1)(m-3)\cdots 5.3.1}{m(m-2)\cdots 6.4.2}\,\frac{\pi}{2}$$

donc enfin

$$S = \frac{\pi a}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}e\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2-\dots\right\}$$

formule très convergente.

Rem. L'expression $\int^{\varphi} d\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}$ a été démontrée par Mr. Liouville ne pouvoir se réduire à aucune des transcendantes connues. On en a fait une nouvelle classe sous le nom de Transcendante Elliptique.

On distingue trois espèces de fonctions elliptiques

1°. $\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$ que l'on représente par $F(e,\varphi)$

2° $\int_0^{\varphi} d\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}$ " " $E(e,\varphi)$

3°. $\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-a\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$ " " $\Pi(e,\varphi)$

Il est un assez grand nombre de fonctions, telles que celle-ci

$$\int\frac{f(x)\,dx}{R} \qquad R=\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}$$

qui se ramènent aux fonctions elliptiques. Alors, au moyen des tables de Legendre on trouve assez commodément les valeurs de ces intégrales entre deux limites données.

2°. Cycloïde. —

$$dy = dx\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$$

Nous avons pour la longueur de l'arc AM

$$\int_0^x dx\sqrt{1+\frac{2a-x}{x}} = \int_0^x dx\sqrt{\frac{2a}{x}} = 2\sqrt{2ax}$$

or $\sqrt{2ax}$ est la longueur de la corde de l'arc correspondant à AM dans le cercle générateur : de sorte que nous retrouvons ce théorème déjà demontré dans le calcul différentiel : L'arc de Cycloïde est double de la corde correspondante dans le cercle générateur.

La Cycloïde entière est donc égale à 4 fois le diamètre de ce cercle.

En Coordonnées Polaires, nous avons

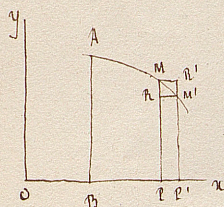
$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$$

Si l'on applique cette formule à la recherche de l'arc de Spirale Logarithmique, on aura à faire sur sa longueur des remarques analogues à celles qui ont été faites sur l'aire de la même courbe. — L'arc qui, à partir d'un point quelconque, s'étend en s'éloignant du point asymptotique, a une longueur infinie ; au contraire l'arc qui se rapproche de ce point tend vers une limite finie : et si l'on suppose $a = e$, cette limite est $r\sqrt{2}$, r étant le rayon vecteur correspondant au point que l'on prend pour origine de l'arc.

Cubature et Quadrature des Surfaces.

Ici, de même que dans la Géométrie élémentaire, les questions relatives à la cubature des surfaces sont beaucoup plus simples que celles qui ont pour objet leur quadrature. Cela tient à ce que nous voyons immédiatement le rapport d'un solide de forme quelconque avec l'unité de mesure, le cube, tandis que nous ne pouvons arriver à comparer une surface courbe avec une surface plane que par des considérations assez abstraites. — Aussi commencerons-nous par les applications du Calcul intégral relatives aux cubatures.

1°. Solides de Révolution. — Nous allons chercher d'abord, quoique ce ne soit pas le cas le plus général, le volume engendré par une courbe plane tournant autour de l'axe des x.



Quelle est la différentielle de ce volume ? — Soit PP' l'accroissement Δx donné à x, accroissement assez petit pour que, dans l'intervalle PP', l'ordonnée aille constamment en croissant ou en décroissant. Le volume engendré par la révolution de $PP'M'M$ est compris entre les cylindres engendrés par la révolution de $MPP'R'$ et $RPP'M'$.

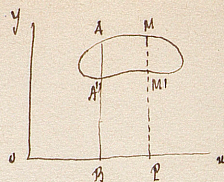
$$\pi (y+\Delta y)^2 \Delta x < \Delta v < \pi y^2 \Delta x$$

$$\pi (y+\Delta y)^2 < \frac{\Delta v}{\Delta x} < \pi y^2$$

à la limite

$$\frac{dv}{dx} = \pi y^2 \qquad dv = \pi y^2 dx$$

et par conséquent
$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2 dx$$



Dans le cas de la figure ci-contre, on aurait
$$V' = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (y^2 - y'^2) dx$$

Exemple. – Proposons-nous de déterminer le volume du Tore, ou le volume engendré par un cercle tournant autour d'un axe situé dans son plan, mais ne passant pas par son centre. – Prenons pour axe des x l'axe de rotation, pour axe des y la perp. abaissée du centre du cercle sur cet axe de rotation. L'Eq. du cercle sera
$$x^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

de là
$$y = \beta + \sqrt{R^2 - x^2}$$
$$y' = \beta - \sqrt{R^2 - x^2}$$
$$y^2 - y'^2 = 4\beta\sqrt{R^2 - x^2}$$

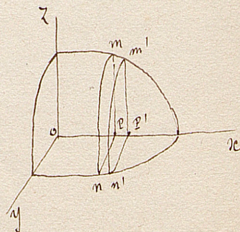
Donc
$$V = 4\pi\beta \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

or cette intégrale est, à un facteur constant près, l'intégrale trouvée pour la quadrature du cercle. Nous ne pouvons donc la trouver. Seulement, nous pouvons la représenter par $\frac{1}{2}\pi R^2$. Donc
$$V = 2\pi^2 R^2 \beta$$

ce que donnait le théorème de Guldin.

Solides Quelconques.

Théorème. – Soit X l'aire d'une section mnP faite dans le solide par un plan parallèle à yoz, l'élément de volume de ce solide V a pour expression
$$dV = X dx$$



Pour le démontrer, je considère une section m'n'P' parallèle à la 1ère et infiniment voisine : puis j'imagine deux cylindres parallèles à Ox et ayant ces deux sections pour bases. Dans le cas de la figure actuelle, ces deux cylindres se trouvent compris l'un dans l'autre, et nous avons

$$X'\Delta x < \Delta V < X\Delta x$$

$$X' < \frac{\Delta V}{\Delta x} < X$$

et à la limite

$$\frac{dV}{dx} = X$$

$$dV = X\,dx$$

Si les deux cylindres, au lieu de se pénétrer sans se couper, étaient tels que leurs bases dans le plan de la section mnP eussent la position ici figurée, la démonstration devrait être un peu modifiée. Je représente par $X+\alpha$ la portion commune aux deux bases, α devenant nul à la limite, puisque alors les deux bases se confondent, et je désigne par $X+\beta$ la partie commune augmentée des deux parties non communes. J'aurai

$$(X+\alpha)\Delta x < \Delta V < (X+\beta)\,\Delta x$$

$$X+\alpha < \frac{\Delta V}{\Delta x} < X+\beta$$

d'où l'on conclura le même théorème.

Nous avons donc pour expression du volume compris entre deux plans parallèles à yoz, et correspondant aux abscisses α et β

$$V = \int_\alpha^\beta X\,dx$$

Exemple. – Soit l'ellipsoïde rapporté à ses axes principaux

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

La section correspondante à l'abscisse x a pour équation

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

et ses axes sont $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ et $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$: d'où son aire

$$\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

le quart de cette quantité est X. on a donc, pour le volume du huitième de l'ellipsoïde,

$$\frac{\pi bc}{4}\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

ou bien, en effectuant,

$$\frac{1}{6}\pi abc$$

Si nous supposons maintenant que les axes ne sont plus rectangulaires, la section toujours ~~perp.~~ parallèle au plan yoz ne sera plus perp. à ox : et si l'on désigne par λ l'angle de l'axe des x avec le plan de la section X, la hauteur du cylindre sera $dx \sin\lambda$, et par suite, en calquant la démonstration précédente, nous aurons

$$dV = X dx \sin\lambda$$

$$V = \sin\lambda\int_a^b X dx$$

Exemple. — Faisons l'application de cette formule à l'ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués obliques

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1$$

La section correspondante à l'abscisse x a pour Eq.

$$\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1-\frac{x^2}{a'^2}$$

et ses diamètres conjugués sont

$$b'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}} \qquad c'\sqrt{1-\frac{x^2}{b'^2}}$$

Donc, en désignant par θ l'angle que font entre eux les diamètres b' et c' auxquels sont parallèles ceux que nous considérons, on aura pour surface de cette ellipse

$$\frac{\pi b'c'}{a'^2}(a'^2-x^2)\sin\theta$$

et par suite, pour le volume du segment d'ellipsoïde,

$$V = \frac{\pi b'c'}{a'^2} \sin\theta \sin\lambda \int_0^x (a'^2 - x^2)\, dx$$

$$V = \frac{\pi b'c'}{a'^2} \sin\theta \sin\lambda \left(a'^2 x - \frac{x^3}{3}\right)$$

et pour l'Ellipsoïde entier, en intégrant entre $-a'$ et $+a'$,

$$\frac{4}{3} \pi a'b'c' \sin\theta \sin\lambda.$$

Comparons cette expression à celle trouvée précédemment pour le même ellipsoïde rapporté à ses axes

$$\frac{4}{3} \pi abc$$

on trouve

$$abc = a'b'c' \sin\theta \sin\lambda$$

Tous les parallélipipèdes construits sur les diamètres conjugués de l'ellipsoïde sont équivalents.

On en déduit encore

$$\pi abc = \pi a'b'c' \sin\theta \sin\lambda$$

$$\pi ab \cdot c = \pi a'b' \sin\theta \cdot c' \sin\lambda$$

Tous les cylindres circonscrits à l'Ellipsoïde et dont les bases sont parallèles aux plans des courbes de contact, sont équivalents.

Imaginons maintenant une surface quelconque dont l'Eq. soit

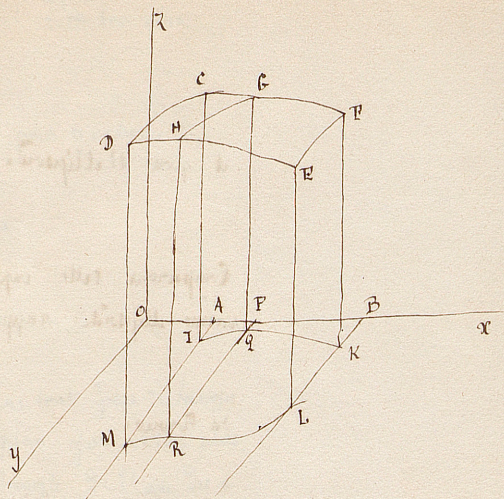
$$F(x, y, z) = 0$$

Nous allons chercher à déterminer le volume compris entre cette surface et le plan des xy, deux plans parallèles à yoz, et deux cylindres parallèles à oz, et ayant pour bases sur le plan yox les deux courbes

$$y = \varphi(x) \qquad y = \psi(x)$$

équations qui dans l'espace, représentent les cylindres eux-mêmes. Ce volume est sur la figure le solide CDEFIKLM.

D'après la formule $V = \int X dx$, il suffit, pour résoudre le



problème, de déterminer l'aire d'une section quelconque faite dans ce solide par un plan GHRQ parallèle à yoz, et distant de ce plan de $OP = x$: ce qui nous ramène à un problème de quadrature. or cette aire plane est comprise entre PQ et une courbe HG, dont l'éq. s'obtient en faisant $x = OP$ dans l'éq. de la surface. Elle a pour différentielle $z\,dy$; et par conséquent nous aurons cette aire en prenant l'intégrale $\int z\,dy$ entre les limites $y = PQ$ et $y = PR$. or ces valeurs d'y sont précisément celles que nous obtiendrons en faisant $x = OP = x$ dans les éq. $y = \varphi(x)$ et $y = \psi(x)$ des deux cylindres. Donc

$$\text{aire } GHQR = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z\,dy$$

on peut observer ici que cette intégrale est une fonction déterminée d'x seulement.

Cela posé, le volume demandé aura pour expression

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z\,dy$$

Le théorème relatif aux éléments d'une intégrale donne de cette expression une explication très simple : $z\,dy$ est l'élément de la surface GHPQR, et par suite $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z\,dy$ représente cette surface, et, en multipliant par dx, on a la tranche infiniment mince découpée dans le solide par deux plans parallèles infiniment rapprochés. Par conséquent le solide est la somme de toutes les tranches semblables comprises entre les plans CM et FL, et c'est ce qu'exprime $\int_a^b \cdots$.

L'ordre dans lequel les intégrations doivent être effectuées n'est point du tout indifférent dans le cas général. Car si, à l'expression en question, on substituait celle-ci

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_a^b z\,dx$$

on obtiendrait non plus le volume compris entre deux plans parallèles aux yz, et deux cylindres parallèles aux z, mais bien le volume détaché dans le solide par deux plans parallèles aux xz et deux cylindres parallèles aux z: et en effet cette expression est ce que devient la 1ère quand on change l'axe des x en l'axe des y et réciproquement.

Mais, si $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étaient des constantes, c.à.d. si les cylindres devenaient des plans, il est bien clair que l'intégrale

$$\int_a^b dx \int_c^d z\,dy$$

représente le même volume que celle-ci

$$\int_c^d dy \int_a^b z\,dx$$

ces deux expression sont donc identiques.

Nous remarquerons encore que, z pouvant être remplacé par $\int dz$, l'intégrale double précédente peut être remplacée par une intégrale triple

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int dz$$

et c'est sur cette intégrale triple surtout que peuvent être aperçues clairement les considérations exposées plus haut, desquelles il résulte que cette méthode pour déterminer le volume d'un solide revient à le considérer comme composé d'une

infinité de petits éléments parallélipipédiques représentés par $dx\,dy\,dz$.

Si, au lieu de considérer le volume terminé inférieurement par le plan xy, on le suppose compris entre deux surfaces courbes $f(x,y,z)=0$, $f_1(x,y,z)=0$, les limites latérales restant les mêmes, l'aire d'une section parallèle au plan des yz serait

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (z-z')\,dy$$

et partant le volume aurait pour expression

$$V = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (z-z')\,dy$$

Proposons-nous de déterminer le volume d'un corps terminé de toutes parts par une surface courbe $f(x,y,z)=0$. – Imaginons un cylindre circonscrit à la surface parallèlement à l'axe des z : il faudra exprimer que ses plans tangents

$$\frac{df}{dx}(x'-x) + \frac{df}{dy}(y'-y) + \frac{df}{dz}(z'-z) = 0$$

sont verticaux, c.à.d. qu'on a

$$\frac{df}{dz} = 0$$

Cette Eq. combinée avec celle de la surface $f(x,y,z)=0$ donnera l'Eq. de la surface du cylindre.

L'élimination de z entre cette dernière Eq. et celle de la surface donne une Eq. en x et y, $\psi(x,y)=0$, qui est précisément l'Eq. de la trace du cylindre sur yox. Cette courbe est, dans notre hypothèse, une courbe fermée ; et en la coupant par un plan parallèle à yoz, on aura deux ordonnées $y=\varphi(x)$ et $y_1=\varphi_1(x)$, qui seront les limites entre lesquelles devra être prise l'intégrale $\int(z-z')\,dy$: z et z' étant d'ailleurs

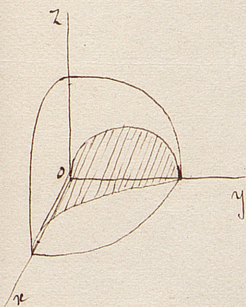
les valeurs de z qui, dans ce plan, correspondent à une même valeur d'y. Si maintenant on désigne par a et b les distances du plan zoy aux plans tangents à la surface qui lui sont parallèles, on aura pour le volume du corps

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (z-z')\,dy$$

ou

$$\int_a^b dx \int_y^{y_1} (z-z')\,dy$$

Exemple. — Soit une sphère ayant son centre à l'origine, et un cylindre parallèle aux z et ayant pour base le cercle décrit sur le rayon de la sphère comme diamètre: on demande de trouver le volume compris entre le plan des xy, la surface de la sphère, celle du cylindre, et le plan des zx, ou bien, ce qui reste du huitième de la sphère quand on en a enlevé le volume découpé par le demi-cylindre.



Prenons la formule

$$V = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z\,dy$$

Il s'agit simplement de déterminer les limites a et b, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$.

D'abord les limites a et b ne sont autre chose que 0 et r, rayon de la sphère. — Quant à $\varphi(x)$, il est aussi nul: nous allons chercher $\psi(x)$. Quelle est sur le plan des xy la projection de l'intersection de la sphère

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

avec le cylindre

$$z^2+y^2-ry=0$$

Cette projection est

$$x^2+yr=r^2$$

D'où

$$\varphi(x)=y=\frac{r^2-x^2}{r}$$

Le volume en question est donc

$$\int_0^r dx \int_0^{\frac{r^2-x^2}{r}} \sqrt{r^2-x^2-y^2}\,dy$$

Nous avons d'abord

$$\int dy\sqrt{r^2-x^2-y^2} = y\sqrt{r^2-x^2-y^2} + \int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

$$\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} = -\int\sqrt{r^2-y^2-x^2}\,dy + \int\frac{(r^2-x^2)\,dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

et enfin, comme

$$(r^2-x^2)\int\frac{dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} = (r^2-x^2)\,\text{arc sin}\,\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

il vient

$$\int dy\sqrt{r^2-x^2-y^2} = \frac{y\sqrt{r^2-x^2-y^2}}{2} + \frac{r^2-x^2}{2}\,\text{arc sin}\,\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

et l'intégrale définie sera, après réduction

$$\int_0^{\frac{r^2-x^2}{r}} dy\sqrt{r^2-x^2-y^2} = \frac{x}{2r^2}(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(r^2-x^2)\,\text{arc cos}\,\frac{x}{r}$$



Nous aurons en conséquence

$$V = \int_0^r \frac{x}{2r^2}(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx + \frac{1}{2}\int_0^r (r^2-x^2)\,\text{arc cos}\,\frac{x}{r}\,dx$$

or

$$\frac{1}{2r^2}\int x(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx = -\frac{1}{10r^2}(r^2-x^2)^{\frac{5}{2}}$$

et par suite

$$\frac{1}{2r^2}\int_0^r x(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{10r^3}$$

Maintenant,

$$\frac{1}{2}\int(r^2-x^2)\,\text{arc cos}\,\frac{x}{r}\,dx = \frac{1}{2}\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)\text{arc cos}\,\frac{x}{r} + \frac{1}{2r}\int\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}}$$

Le 1er terme devenant nul aux limites 0 et r, je ne considère que la dernière intégrale. or on aura :

$$\frac{1}{2r}\int\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}}=\frac{1}{6}\int\frac{(3r^2-x^2)x\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{1}{6}\int\frac{(r^2-x^2+2r^2)x\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$=\frac{1}{6}\int(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}x\,dx+\frac{1}{3}r^2\int(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}x\,dx$$

$$=-\frac{1}{12}\int(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}d(-x^2)-\frac{1}{6}r^2\int(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(-x^2)$$

$$=-\frac{1}{12}\frac{(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{6}r^2\frac{(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{18}(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}r^2(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Si l'on prend cette quantité entre les limites 0 et r, on aura

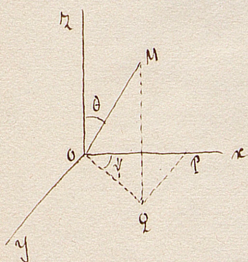
$$+\frac{1}{18}r^3+\frac{1}{3}r^3 \quad\text{ou}\quad \frac{7}{18}r^3$$

Donc enfin

$$V=\frac{1}{10}r^3+\frac{7}{18}r^3=\frac{22}{45}r^3$$

Cubature d'un Solide en Coordonnées polaires.

En Coordonnées polaires, la position d'un point dans l'espace se définit au moyen de l'angle ψ que fait avec l'axe Ox la projection du rayon vecteur sur le plan xoy, la longueur r du rayon vecteur, et l'angle θ que celui-ci fait avec l'axe des z. Nous avons donc

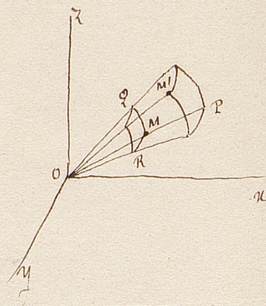


$$x=r\sin\theta\cos\psi$$
$$y=r\sin\theta\sin\psi$$
$$z=r\cos\theta$$

Cela revient à déterminer le point M par l'intersection de

trois surfaces, une sphère, un cône et un plan : une sphère de rayon r ; un cône engendré par les rayons qui font avec OZ l'angle constant θ ; et un plan lieu des rayons dont la projection sur xoy fait avec ox un angle ψ.

Cela posé, l'élément de volume se définira facilement. Soit un point M' voisin de M ; il sera, comme le premier, déterminé par trois surfaces qui, avec les trois premières, comprendront un certain volume dont la génération est facile à apercevoir. Prolongeons le rayon vecteur OM d'une longueur $MP = dr$; et faisons tourner ce rayon autour de OZ d'un angle $d\psi$: nous aurons un quadrilatère PR, et faisant enfin tourner ce quadrilatère d'un angle $d\theta$, nous aurons le volume MM' compris entre deux sphères, deux cônes et deux plans. — Et les accroissements $d\theta$, $d\psi$ et dr étant infiniment petits, ce sera là l'élément de volume. Or il peut être considéré comme un parallélipipède rectangle dont les arêtes sont dr, $rd\theta$ et $r\sin\theta\, d\psi$: car le point où vont concourir les arêtes étant à une distance finie, est à une distance infinie relativement à la quantité infiniment petite dr. ainsi



$$r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\psi$$

sera l'expression de l'élément de volume : et le volume lui-même sera la somme de ces éléments, ou

$$\iiint r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\psi$$

Nous avons maintenant deux cas à distinguer, suivant que l'origine O est dans l'intérieur du volume ou à l'extérieur.

1°. L'origine est dans l'intérieur du solide. — Regardons

d'abord θ et ψ comme des constantes, et intégrons par rapport à r entre les limites 0 et r :

$$\sin\theta\, d\theta\, d\psi \int_0^r r^2 dr$$

représente un filet conique d'élément de volume semblable à celui que comprennent les rayons infiniment voisins OM, OR, OQ et OM'. Or

$$\int_0^r r^2 dr = \frac{r^3}{3}$$

et, d'après l'éq. de la surface $r = f(\theta, \psi)$, on aura

$$\frac{1}{3} \sin\theta\, d\theta \left[f(\theta, \psi)\right]^3 d\psi$$

Intégrant maintenant par rapport à θ entre les limites 0 et 2π, nous aurons l'expression d'une série de filets coniques compris dans toute l'étendue d'une section passant par l'axe des z. Cette intégration ne peut que s'indiquer tant que $f(\theta, \psi)$ n'est pas particularisé. Quoi qu'il en soit, l'expression se réduira à une fonction différentielle de ψ, $F(\psi)\,d\psi$. Pour avoir le volume total, il suffit de transporter dans tous les azimuths la tranche que représente cette expression, en d'autres termes d'intégrer entre les limites 0 et 2π

$$V = \int_0^{2\pi} F(\psi)\, d\psi$$

2°. L'origine est en dehors du corps. Dans ce cas, il arrive nécessairement qu'à chaque valeur de θ et de ψ correspondent au moins deux valeurs de r. Si on les désigne par r' et r'', ces valeurs exprimées en fonction de θ et de ψ seront les limites entre lesquelles devra être prise la 1ère intégrale.

Maintenant, à chaque valeur de ψ correspondent deux valeurs de θ, pour lesquelles le rayon vecteur est tangent à la section déterminée par le plan zOQ : les angles θ' et θ'' que font

ces tangentes avec l'axe des z seront les limites entre lesquelles devra se faire la seconde intégration. On comprend déjà combien la détermination de ces limites pourra être compliquée dans la pratique.

Enfin, parmi tous les plans menés suivant Oz, il en est deux qui sont tangents au corps, et le comprennent entre eux. Les angles ψ' et ψ'' que font avec Ox les traces de ces plans sur xoy seront les limites entre lesquelles on devra intégrer par rapport à ψ. — Ceci suppose que le solide ne rencontre pas l'axe Oz : si celui-ci traverse le corps, il faut prendre la dernière intégrale entre les limites 0 et 2π.

Quadrature des Surfaces.

On regarde l'aire d'une surface courbe comme la limite de la somme des éléments plans d'une surface polyédrale inscrite ou circonscrite, dont les faces deviennent de plus en plus petites à mesure qu'elles augmentent en nombre. — L'existence de cette limite est démontrée par les raisonnements mêmes qui en déterminent la valeur.

Considérons d'abord les Surfaces de Révolution. — L'aire d'une telle surface peut être considérée comme la limite de la surface engendrée par un polygone inscrit dans la courbe méridienne, et entraîné dans son mouvement de rotation. Cette aire par conséquent est la limite de la somme des surfaces d'une série de troncs de cône dont un quelconque a pour surface latérale

$$\Delta s = \{\pi y + \pi(y+\Delta y)\}\sqrt{\Delta y^2+\Delta x^2}$$

$$\Delta S = (2\pi y + \pi \Delta y)\sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2}$$

$$\Delta S = \left\{ 2\pi y \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} + \pi \Delta y \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \right\} \Delta x$$

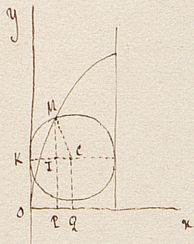
et à la limite

$$dS = 2\pi y\, dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

car la partie qui contient Δy est nulle à la limite. Donc

$$S = 2\pi \int y\, dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2\pi \int y\, ds$$

s étant la longueur de l'arc de courbe considéré. — on donnerait d'ailleurs à cette démonstration toute la rigueur désirable en appliquant ici presque mot pour mot le raisonnement qui a été fait lors de la recherche de la différentielle de l'arc de courbe.



Comme application de cette formule, cherchons la surface engendrée par l'arc de cycloïde. — Il est commode d'introduire un angle auxiliaire $u = MCK$. Nous aurons

$$x = a(1 - \cos u)$$

$$y = a(u + \sin u)$$

D'où

$$dx = a \sin u\, du \qquad dy = a(1 + \cos u)\, du$$

$$ds = a\, du \sqrt{2 + 2\cos u} = a\, du \sqrt{2}\sqrt{1+\cos u} = 2a\, du \cos\tfrac{1}{2} u$$

Donc

$$S = 2\pi \int_0^u y\, ds = 4\pi a^2 \int_0^u (u + \sin u) \cos\tfrac{1}{2} u\, du$$

$$S = 4\pi a^2 \int_0^u u \cos\tfrac{1}{2} u\, du + 4\pi a^2 \int_0^u \sin u \cos\tfrac{1}{2} u\, du.$$

La seconde intégrale est $8\pi a^2 \int_0^u \sin\tfrac{1}{2} u \cos^2\tfrac{1}{2} u\, du$ ou bien

$$\frac{16\pi a^2}{3} \cos^3\tfrac{1}{2} u - \frac{16\pi a^2}{3}$$

La 1ère intégrale s'obtient facilem^t. par l'intégration par parties.

$$\int u \cos\tfrac{1}{2}u\, du = 2u \sin\tfrac{1}{2}u - 2\int \sin\tfrac{1}{2}u\, du$$

$$= 2u \sin\tfrac{1}{2}u + 4\cos\tfrac{1}{2}u$$

et

$$\int_0^u u \cos\tfrac{1}{2}u\, du = 2u\sin\tfrac{1}{2}u + 4\cos\tfrac{1}{2}u - 4$$

Donc

$$S = \left(2u\sin\tfrac{1}{2}u + 4\cos\tfrac{1}{2}u\right)4\pi a^2 + \frac{16\pi a^2}{3}\left(\cos^3\tfrac{1}{2}u - 1\right)$$

En faisant dans cette expression $u = \frac{\pi}{2}$, on aura la surface engendrée par la moitié de la cycloïde ; ce sera

$$S' = \left(\pi\frac{\sqrt{2}}{2} + 4\frac{\sqrt{2}}{2}\right)4\pi a^2 + \frac{16\pi a^2}{3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{8} - 1\right)$$

$$S' = 2\pi^2 a^2\sqrt{2} + \frac{28}{3}\pi a^2\sqrt{2} - \frac{16}{3}\pi a^2$$

Surfaces Quelconques.

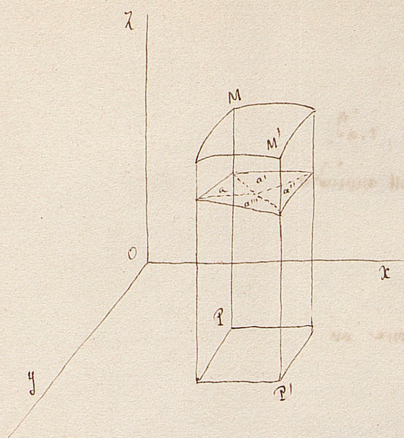
L'expression d'une surface quelconque est

$$S = \iint dx\, dy \sqrt{1+p^2+q^2}$$

$$p = \frac{dz}{dx} \qquad q = \frac{dz}{dy}$$

Pour démontrer cette formule, menons quatre plans respectivement parallèles à chacun des deux plans xz et yz. Ils formeront un prisme droit à base rectangulaire dont la base sera $\Delta x \Delta y$. Ce prisme détachera sur la surface un quadrilatère curviligne MM'. Il coupera aussi le polyèdre inscrit suivant un quadrilatère gauche qu'on pourra décomposer en un certain nombre de petits triangles élémentaires a, a', a''.. Désignons par λ l'angle que fait le plan tangent en M avec le plan xy. Nous savons que

$$\frac{1}{\cos\lambda} = \sqrt{1+p^2+q^2} \quad \text{ou} \quad \cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$



Soient $\theta, \theta', \theta''$.. les angles des plans des triangles élé-mentaires avec le plan des xy. on peut poser

$$\cos\theta = \cos\lambda\,(1+\alpha)$$
$$\cos\theta' = \cos\lambda\,(1+\alpha')$$
$$\cos\theta'' = \cos\lambda\,(1+\alpha'')$$
$$\cdots$$

$\alpha, \alpha', \alpha''$.. tendant vers zéro à mesure que M' se rapproche de M.

$\Delta x\,\Delta y$ représente la projection du quadrilatère gauche sur le plan xoy. D'un autre côté, cette projection est aussi égale à la somme des projections des éléments triangulaires du quadrilatère. on a donc

$$\Delta x\,\Delta y = a\cos\lambda\,(1+\alpha) + a'\cos\lambda\,(1+\alpha') + a''\cos\lambda\,(1+\alpha'') + \cdots$$

$$\Delta x\,\Delta y = \cos\lambda\,(a+a'+a''+\cdots + a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \cdots)$$

Posons $a+a'+a''+\cdots = M$ = surf. totale du quadrilatère gauche.

$$\Delta x\,\Delta y = \cos\lambda\,(M + a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \cdots)$$

$$\frac{\Delta x\,\Delta y}{\cos\lambda} = M + a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \cdots$$

En décomposant de même toute l'étendue de la surface en quadrilatères curvilignes élémentaires, nous aurons un certain nombre d'équations analogues à celle-ci : et, en les ajoutant membre à membre, on aura

$$\sum \frac{\Delta x\,\Delta y}{\cos\lambda} = \sum M + \sum (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \cdots)$$

d'où

$$\mathrm{Lim} \sum \frac{\Delta x\,\Delta y}{\cos\lambda} = \mathrm{Lim} \sum M + \mathrm{Lim} \sum (a\alpha + a'\alpha' + \cdots)$$

d'où l'on pourrait tirer $\mathrm{Lim} \sum M$. or cette quantité est la limite vers laquelle tend la surface polyédrale inscrite, c.a.d.

par définition, la surface courbe cherchée. Il reste donc à voir si cette limite existe, et quelle en est la valeur.

Or

$$\lim \Sigma (a\alpha + a'\alpha' + \cdots) = 0$$

En effet, on peut toujours prendre Δx et Δy assez petits, c.à.d. le point M' assez voisin de M, pour que $\alpha, \alpha', \alpha''$.. soient moindres que ε, quantité aussi petite que l'on voudra. Donc

$$\Sigma (a\alpha + a'\alpha' + \cdots) < \varepsilon \, \Sigma (a + a' + a'' + \cdots) < \varepsilon \, \Sigma M$$

Or ΣM est une quantité finie, ε tend vers zéro : donc on peut dire que le 1.er membre a pour limite zéro.

Donc

$$\lim \Sigma M = \lim \Sigma \frac{\Delta x \Delta y}{\cos \lambda}$$

Faisons voir maintenant que $\Sigma \frac{\Delta x \Delta y}{\cos\lambda}$ a une limite : et, pour y parvenir, faisons voir que cette somme représente un volume, c.à.d. quelque chose de fini et de bien déterminé.

On peut regarder $\frac{1}{\cos\lambda} = \sqrt{1+p^2+q^2}$ comme l'ordonnée d'une surface. Représentons-la par z. L'expression devient

$$\Sigma \, z \Delta x \Delta y$$

La surface dont l'ordonnée est z sera coupée par le prisme PP' suivant un quadrilatère curviligne : la portion de volume comprise dans ce prisme entre ce quadrilatère et le plan xoy sera un élément de volume. Dans l'étendue de l'élément curviligne découpé par le prisme sur la surface, l'ordonnée z varie de sa plus grande valeur z_1 à sa plus petite z_2 : d'après cela, l'élément de volume est compris entre

$$\Delta x \Delta y \, z_1 \quad \text{et} \quad \Delta x \Delta y \, z_2$$

on peut donc écrire, en désignant par Δv cet élément

$$\Delta v = \Delta x \Delta y \, z \, (1+\varepsilon)$$

ε tendant vers zéro. _ Maintenant, la somme des éléments

Ce donnera

$$\lim \Sigma \Delta V \text{ ou } V = \lim \Sigma z \Delta x \Delta y (1+\varepsilon)$$

$$V = \lim \Sigma z \Delta x \Delta y + \lim \Sigma z \Delta x \Delta y \varepsilon$$

La dernière quantité a pour limite zéro : en effet, soit ω la plus grande valeur de ε.

$$\Sigma z \Delta x \Delta y \varepsilon < \omega \Sigma z \Delta x \Delta y$$

et le second membre tend vers zéro. Donc

$$V = \lim \Sigma z \Delta x \Delta y$$

c. à d. que $\Sigma \Delta x \Delta y \sqrt{1+p^2+q^2}$ a une limite finie : c'est la valeur de V. Cette valeur, comme on sait, est donnée par la formule

$$V = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z\,dy$$

Nous aurons donc l'expression de la surface comprise entre les mêmes limites, en remplaçant z par sa valeur.

$$S = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \sqrt{1+p^2+q^2}$$

La formule se trouve ainsi démontrée.

Différentiation sous le signe $\int$.

L'objet de cette opération est de trouver la différentielle d'une intégrale indiquée par rapport à une variable différente de celle sur laquelle porte l'intégration.

Soit l'expression
$$u = \int f(x,\alpha)\,dx$$
il s'agit de la différentier par rapport à α, sans effectuer l'intégration relative à x.

Or je dis qu'on a
$$\frac{du}{d\alpha} = \int \frac{d\,f(x,\alpha)}{d\alpha}\,dx$$

En effet
$$\frac{du}{dx} = f(x,\alpha)$$
$$\frac{d\,\frac{du}{dx}}{d\alpha} = \frac{d\,f(x,\alpha)}{d\alpha}$$

ou, comme on peut intervertir l'ordre des différentiations,
$$\frac{d\,\frac{du}{d\alpha}}{dx} = \frac{d\,f(x,\alpha)}{d\alpha}.$$
$$d\,\frac{du}{d\alpha} = \frac{d.\,f(x,\alpha)}{d\alpha}\,dx.$$

Donc
$$\frac{du}{d\alpha} = \int \frac{d.\,f(x,\alpha)}{d\alpha}\,dx$$
c q f d.

Cela convient pour une intégrale indéfinie. – Si l'on y

eût joint une constante explicite, que serait-elle devenue après l'opération ? — Pour répondre à cette question, nous allons aborder le cas des intégrales définies, qui la résoudra complètemt.

Supposons d'abord que α n'entre que dans les limites a et b. Posons

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

nous aurons

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

En différentiant

$$\frac{d.\int_a^b f(x)\,dx}{d\alpha} = \frac{d.F(b)}{d\alpha} - \frac{d.F(a)}{d\alpha} = F'(b)\frac{db}{d\alpha} - F'(a)\frac{da}{d\alpha}$$

$\frac{db}{d\alpha}$ et $\frac{da}{d\alpha}$ sont connus : $F'(b)$ et $F'(a)$ ne sont autre chose que $f(b)$ et $f(a)$. Donc

$$\frac{d\int_a^b f(x)\,dx}{d\alpha} = f(b)\frac{db}{d\alpha} - f(a)\frac{da}{d\alpha}$$

Supposons maintenant que le paramètre entre partout, dans a, b, et dans la fonction soumise au signe $\int$. Posons

$$\int f(x,\alpha)\,dx = F(x,\alpha)$$

Nous aurons

$$\int_a^b f(x,\alpha)\,dx = F(b,\alpha) - F(a,\alpha)$$

Le 2d. membre est fonction de a, b et de α, a et b sont fonctions d'α : le second membre est donc une fonction d'α. En le désignant par u, on aura

$$\left(\frac{du}{d\alpha}\right) = \frac{du}{db}\frac{db}{d\alpha} + \frac{du}{da}\frac{da}{d\alpha} + \frac{du}{d\alpha}$$

Les deux premiers termes du second membre s'obtiendront facilement. Cherchons le dernier. — Pour l'obtenir, il faut supposer a et b constants, et α seule variable. Donnons à α l'accroissement $\Delta\alpha$, u prendra l'accroissement Δu, et l'on aura

$$u + \Delta u = \left\{ \int_a^b [f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)]\, dx \right\} \Delta\alpha$$

$$u + \Delta u = \int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha)\, dx$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta\alpha} = \frac{\int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha)\, dx - u}{\Delta\alpha}$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta\alpha} = \int_a^b \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\, dx$$

nous introduisons $\Delta\alpha$ sous le signe $\int$, parce que $\Delta\alpha$ est indépendant de x par rapport à qui l'intégration doit s'effectuer.

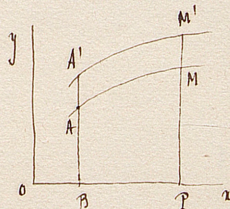
et, à la limite,

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_a^b \frac{d\, f(x, \alpha)}{d\alpha}\, dx$$

on a donc enfin

$$\frac{du}{d\alpha} = \frac{du}{db}\frac{db}{d\alpha} + \frac{du}{da}\frac{da}{d\alpha} + \int_a^b \frac{d\, f(x, \alpha)}{d\alpha}\, dx$$

Rem. on peut interpréter ces résultats géométriquement, ce qui fournit une nouvelle démonstration du théorème d'analyse.



Posons $y = f(x, \alpha)$. Nous pouvons regarder y comme l'ordonnée d'une courbe AM dont nous considérerons la surface entre les limites A et M. Supposons que ces limites ne dépendent pas de α. Si nous donnons à α un accroissement $\Delta\alpha$, nous aurons une seconde courbe A'M' voisine de la 1ère.

or

$$\int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \text{aire ABMP}$$

$$\int_a^b f(x, \alpha+\Delta\alpha)\, dx = \text{aire } A'BM'P$$

L'accroissement Δu de l'aire correspondant à l'accroissement $\Delta\alpha$ est la différence de ces deux intégrales

$$\int_a^b f(x, \alpha+\Delta\alpha)\, dx - \int_a^b f(x,\alpha)\, dx = \text{aire } AA'M'M = \Delta u$$

ou bien, à la limite,

$$du = d\alpha \int_a^b \frac{d f(x,\alpha)}{d\alpha}\, dx$$

résultat que nous avait donné l'analyse.

Intégration sous le signe $\int$.

Considérons d'abord l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x,\alpha)\, dx$$

les limites a et b étant des constantes; et supposons qu'on veuille obtenir l'intégrale de cette intégrale par rapport à α; en d'autres termes, soit à chercher

$$\int_m^n d\alpha \int_a^b f(x,\alpha)\, dx$$

Je dis qu'on peut intervertir l'ordre des intégrations, c. à d. que

$$\int_m^n d\alpha \int_a^b f(x,\alpha)\, dx = \int_a^b dx \int_m^n f(x,\alpha)\, d\alpha$$

Ce principe a déjà été démontré quand il s'est agi de la cubature des solides. En effet, ces deux intégrales représentent toutes deux le volume compris entre la surface $z = f(x, y)$ le plan des xy, et 4 plans, dont deux parallèles aux

x^2, et deux aux y^2. — Mais il est facile d'en trouver la raison analytique.

Considérons d'abord l'intégrale indéfinie par rapport à α.

$$\int d\alpha \int_a^b f(x,\alpha)\, dx = \int_a^b dx \int f(x,\alpha)\, d\alpha$$

cette égalité sera vraie, du moins à une constante près indépendante de α, si nous faisons voir que les différentielles sont les mêmes. Or, en différentiant sous le signe $\int$, nous avons

d'une part $\qquad \int_a^b f(x,\alpha)\, dx$

de l'autre $\qquad \int_a^b dx\, f(x,\alpha)$

La proposition est donc vraie pour l'intégrale indéfinie. Si nous introduisons une limite inférieure α_0, la constante s'annule, et l'on a exactement

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \int_a^b f(x,\alpha)\, dx = \int_a^b dx \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x,\alpha)\, dx$$

Maintenant, cette égalité étant vraie quelque valeur que l'on donne à la limite supérieure α, on aura encore, en particularisant cette valeur

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_a^b f(x,\alpha)\, dx = \int_a^b dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,\alpha)\, d\alpha$$

c.q.f.d.

---

appliquons ce principe à la recherche de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x\, dx}{x}$$

on arrivera à

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x\, dx}{x} = \pm \frac{\pi}{2} \quad \begin{cases} + & \text{si } \alpha > 0 \\ - & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

formule utile dans la Physique Mathématique.

Pour y arriver, considérons d'abord l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-mx} \sin \alpha x\, dx$$

l'intégration par parties nous donne

$$\int e^{-mx} \sin \alpha x\, dx = -\frac{e^{-mx} \cos \alpha x}{\alpha} - \frac{m}{\alpha} \int \cos \alpha x\, e^{-mx} dx$$

$$\int e^{-mx} \cos \alpha x\, dx = \frac{e^{-mx} \sin \alpha x}{\alpha} + \frac{m}{\alpha} \int \sin \alpha x\, e^{-mx} dx$$

Donc enfin

$$\int e^{-mx} \sin \alpha x\, dx = -\frac{\alpha}{m^2+\alpha^2} e^{-mx} \cos \alpha x - \frac{m}{m^2+\alpha^2} e^{-mx} \sin \alpha x$$

Entre les limites données

$$\int_0^\infty e^{-mx} \sin \alpha x\, dx = \frac{\alpha}{m^2+\alpha^2}$$

Car, pour $x = \infty$, e^{-mx} devenant nul, et $\cos \alpha x$, $\sin \alpha x$ étant toujours compris entre -1 et $+1$, le second membre se réduit à zéro.

Maintenant, multiplions par dm les deux membres, et intégrons

$$\int dm \int_0^\infty e^{-mx} \sin \alpha x\, dx = \int_0^\infty \sin \alpha x\, dx \int e^{-mx} dm = \int_0^\infty \sin \alpha x . dx . \left(-\frac{e^{-mx}}{x}\right)$$

Mais le second membre devient

$$\int \frac{\alpha\, dm}{m^2+\alpha^2} = \text{arc tg} \frac{m}{\alpha} + C$$

Donc

$$\int_0^\infty \sin \alpha x . dx \left(-\frac{e^{-mx}}{x}\right) = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{suiv}^t. \text{ le signe d'}\alpha.$$

Si maintenant dans cette formule je fais $m=0$, il vient

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2x\,dx}{x} = \pm\frac{\pi}{2} \quad \text{c.q.f.d.}$$

La différentiation sous le signe $\int$ est un moyen de découvrir des intégrales, en partant d'intégrales définies connues, et les différentiant par rapport à une constante.

Formule de Fourier. — $F(x)$ étant une fonction quelconque de x, on a

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_0^\infty F(\alpha)\,\cos p\,(x-\alpha)\,dp$$

occupons-nous d'abord de l'intégrale

$$\int_0^\infty \cos p\,(x-\alpha)\,dp$$

on a

$$\int_0^p \cos p\,(x-\alpha)\,dp = \frac{\sin p\,(x-\alpha)}{x-\alpha}$$

avant de faire croître p au delà de toutes limites, je substitue, et j'obtiens

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, F(\alpha)\,\frac{\sin p\,(x-\alpha)}{x-\alpha}$$

Je pose $x-\alpha = -\frac{z}{p}$ d'où $\alpha = x+\frac{z}{p}$, et il vient

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F\left(x+\frac{z}{p}\right)\frac{\sin z}{z}\,dz$$

Lorsque p devient infiniment grand, $\frac{z}{p}$ devient infiniment petit : il est vrai qu'il n'en serait pas ainsi si z devenait

lui-même très-grand : mais alors $\frac{\sin z}{z}$ deviendrait très-petit ; il est donc permis de négliger $\frac{z}{p}$: et alors nous avons

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,\frac{\sin z}{z}\,dz = \frac{1}{\pi}\,F(x)\times\pi = F(x)$$

en intégrant $\frac{\sin z\,dz}{z}$, d'après la formule trouvée tout à l'heure

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x\,dx}{x} = \pm\pi$$

Cette démonstration est due à Deflers, ancien élève de l'École Normale.

On emploie encore, pour trouver une intégrale définie, une autre méthode, qui consiste à ramener l'intégrale simple à une intégrale double, l'indépendance des deux variables pouvant parfois conduire à des simplifications. Soit l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$$

et désignons par K sa valeur. Elle est identique à

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy$$

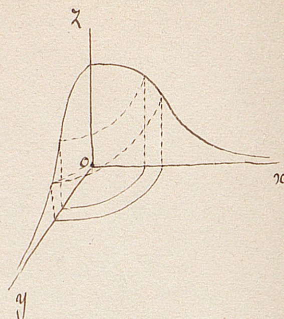
donc, en multipliant,

$$K^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx \times \int_0^{\infty} e^{-y^2}dy$$

or y est indépendant d'x ; on peut donc faire passer e^{-x^2} sous la seconde intégrale, et l'on a ainsi une intégrale double

$$K^2 = \int_0^{\infty} dx\int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2}dy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2}dx\,dy$$

or cette Intégrale double représente le quart du volume compris entre le plan xoy et la surface dont l'éq. est $z = e^{-x^2-y^2}$, et qui est engendrée par la révolution autour de oz de la courbe $z = e^{-x^2}$. — Décomposons ce volume en cylindres ayant oz pour axe, et soient deux de ces cylindres infiniment voisins. La base du 1er. étant πx^2, celle du suivant sera $\pi (x+\Delta x)^2$, et par suite la différence de ces bases a pour expression



$$2\pi x \Delta x + \pi \Delta^2 x$$

et à la limite,

$$2\pi x\, dx.$$

Quant à la hauteur, c'est la valeur de z correspondante sur la courbe génératrice, à la valeur x de l'abscisse, ou bien $z = e^{-x^2}$. ainsi, en définitive, l'élément de volume a pour expression

$$2\pi e^{-x^2} x\, dx.$$

Le volume total aura pour valeur l'intégrale de cette expres-sion, prise entre les limites 0 et ∞, ou

$$\int_0^\infty 2\pi e^{-x^2} x\, dx = 2\pi \int_0^\infty e^{-x^2} x\, dx$$

et par conséquent le volume compris dans l'angle trièdre des coordonnées positives aura pour expression

$$\frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} x\, dx$$

or $\int e^{-x^2} x\, dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$. donc $\int_0^\infty e^{-x^2} x\, dx = \frac{1}{2}$, et nous avons enfin

$$k^2 = \frac{\pi}{4} \qquad \text{d'où} \quad k = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

---

ainsi
$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$
en changeant x en $x\sqrt{a}$, il vient
$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$
et
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

En différentiant cette expression relativement à a, nous aurons des résultats nouveaux
$$-\int_{-\infty} e^{-ax^2} x^2 dx = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\; a^{-\frac{3}{2}}$$
En différentiant une seconde fois
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} x^4 dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\pi}\; a^{-\frac{5}{2}}$$
Donc, après n différentiations :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} x^{2n} dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2}\sqrt{\pi}\; a^{-\frac{2n+1}{2}}$$

Changeons dans l'expression primitive x en $x+a$: les limites ne sont pas changées, et on a
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+a)^2} dx = e^{-a^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2ax} dx = \sqrt{\pi}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2ax} dx = e^{a^2}\sqrt{\pi}$$
Cette formule semble supposer que a est réel : car elle

est déduit d'une autre dans laquelle x est essentiellement positif. Néanmoins il est permis de donner à α une valeur imaginaire. En effet, nous pouvons développer les deux membres en série suivant les puissances ascendantes de α : et comme ces séries seront convergentes, les coefficients des mêmes puissances de α dans chacune d'elles devront être respectivement égaux, et alors, comme ces coefficients ne changent pas quelque valeur que l'on donne à α, on pourra, sans troubler l'égalité, remplacer α par $\alpha\sqrt{-1}$. Effectuons ce changement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2\alpha x\sqrt{-1}}\,dx = e^{-\alpha^2}\sqrt{\pi}$$

ou bien, comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty}$$

on aura

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\left(e^{2\alpha\sqrt{-1}\,x} + e^{-2\alpha\sqrt{-1}\,x}\right)dx = e^{-\alpha^2}\sqrt{\pi}$$

or

$$e^{2\alpha x\sqrt{-1}} + e^{-2\alpha x\sqrt{-1}} = 2\cos 2\alpha x$$

donc

$$2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx = e^{-\alpha^2}\sqrt{\pi}$$

C'est ici que se placent les Intégrales Eulériennes,

p. 229.

Nouveaux Compléments.

applications et Théories diverses.

—

Série de Lagrange.

Le but que nous nous proposons est de développer la valeur de z, fournie par l'Équation

$$z = x + y\, f(z) \qquad (1)$$

suivant les puissances ascendantes de y, qui, dans les applications, est d'ordinaire un nombre très-petit.

Il est clair que z peut être regardé comme une fonction implicite des deux variables indépendantes x et y, soit $z = \pi(x, y)$. Nous aurons donc par la Série de Mac-Laurin

$$z = \pi(x, 0) + \frac{y}{1}\pi'(x, 0) + \frac{y^2}{1.2}\pi''(x, 0) + \ldots$$

ou bien, en remarquant que, pour $y = 0$, on a $z = x$,

$$z = x + \frac{y}{1}\left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=0} + \frac{y^2}{1.2}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)_{y=0} + \frac{y^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)_{y=0} + \ldots$$

La seule difficulté est de trouver la valeur générale de $\dfrac{d^nz}{dy^n}$.

Pour cela, différentions l'Éq. (1) successivement par rapport aux deux variables x et y. Il viendra

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= 1 + y\, f'z\, \frac{dz}{dx} \\ \frac{dz}{dy} &= fz + y\, f'z\, \frac{dz}{dy} \end{aligned}\right.$$

d'où évidemment

$$\frac{dz}{dy} = f(z)\,\frac{dz}{dx} \qquad (2)$$

Ces valeurs montrent encore que, pour $y=0$, on a $\frac{dz}{dx}=1$

Maintenant, pour avoir les coefficients différentiels suivants, nous allons établir une formule générale qui les donnera commodément.

Soit ψz une fonction quelconque de z. Nous aurons

$$\frac{d}{dy}\left(\psi z\,\frac{dz}{dx}\right) = \psi z\,\frac{d^2z}{dx\,dy} + \psi' z\,\frac{dz}{dx}\,\frac{dz}{dy}$$

Remplaçons $\frac{dz}{dy}$ par sa valeur (2) qui est

$$\frac{dz}{dy} = fz\,\frac{dz}{dx} \qquad (2)$$

et $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ par la valeur qu'on en tire et que voici:

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = f'z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + fz\,\frac{d^2z}{dx^2} \qquad (3)$$

il viendra

$$\frac{d}{dy}\left(\psi z\,\frac{dz}{dx}\right) = \psi z\, f'z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \psi z\, fz\,\frac{d^2z}{dx^2} + \psi' z\, fz\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

$$= \psi z\, fz\,\frac{d^2z}{dx^2} + \left\{\psi z\, f'z + \psi' z\, fz\right\}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

enfin

$$\frac{d\left(\psi z\,\frac{dz}{dx}\right)}{dy} = \frac{d\left(\psi z\, fz\,\frac{dz}{dx}\right)}{dx} \qquad (4)$$

Cela posé, en ayant égard à cette formule, c.à.d. en remplaçant successivement ψz par fz, par $(fz)^2$, $(fz)^3$ etc. on aura de proche en proche

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left\{fz\,\frac{dz}{dx}\right\} = \frac{d\left\{(fz)^2\frac{dz}{dx}\right\}}{dx}$$

$$\frac{d^3z}{dy^3} = \frac{d}{dy}\left[\frac{d\left\{(fz)^2\frac{dz}{dx}\right\}}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{d\left\{(fz)^2\frac{dz}{dx}\right\}}{dy}\right] = \frac{d^2\left\{(fz)^3\frac{dz}{dx}\right\}}{dx^2}$$

$$\frac{d^4z}{dy^4} = \frac{d}{dy}\left[\frac{d^2\left\{(fz)^3\frac{dz}{dx}\right\}}{dx^2}\right] = \frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{d\left\{(fz)^3\frac{dz}{dx}\right\}}{dy}\right] = \frac{d^3\left\{(fz)^4\frac{dz}{dx}\right\}}{dx^3}$$

et il est clair qu'en continuant, on aura généralement:

$$\frac{d^n z}{dy^n} = \frac{d^{n-1}\left\{(fz)^n \frac{dz}{dx}\right\}}{dx^{n-1}}$$

Si maintenant on fait $y=0$ d'où $z=x$ et $\frac{dz}{dx}=1$, il vient

$$\left(\frac{d^n z}{dy^n}\right)_{y=0} = \frac{d^{n-1}.(fx)^n}{dx^{n-1}}$$

et en reportant dans la Série de Mac-Laurin, on a celle de Lagrange :

$$z = x + \frac{y}{1}fx + \frac{y^2}{1.2}\frac{d.(fx)^2}{dx} + \frac{y^3}{1.2.3}\frac{d^2.(fx)^3}{dx^2} + \frac{y^4}{1.2.3.4}\frac{d^3.(fx)^4}{dx^3} + \cdots \text{(A)}$$

---

avant de passer aux applications, donnons une nouvelle formule plus Générale, qui permet de développer d'une manière semblable une fonction comme quelconque $\varphi(z)$.

appliquant toujours la Série de Mac-Laurin, on aura

$$\varphi(z) = \varphi(x) + \frac{y}{1}\left(\frac{d.\varphi z}{dy}\right)_{y=0} + \frac{y^2}{1.2}\left(\frac{d^2.\varphi z}{dy^2}\right)_{y=0} + \cdots\cdots$$

on aura

$$\frac{d(\varphi z)}{dy} = \varphi' z \frac{dz}{dy}$$

et, en vertu de (2)

$$\frac{d.\varphi z}{dy} = \varphi' z\, fz \frac{dz}{dx}$$

Maintenant, à cause de la formule Générale (4), où l'on peut poser $\psi x = \varphi' z\, fz$, $\psi z = \varphi' z\,(fz)^2$, etc. on trouvera

$$\frac{d^2.\varphi z}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\varphi' z\, fz \frac{dz}{dx}\right) = \frac{d\left\{\varphi' z(fz)^2\frac{dz}{dx}\right\}}{dx}$$

$$\frac{d^3.\varphi z}{dy^3} = \frac{d}{dy}\left\{\frac{d\left[\varphi' z(fz)^2\frac{dz}{dx}\right]}{dx}\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d\left[\varphi' z(fz)^2\frac{dz}{dx}\right]}{dy}\right\} = \frac{d^2\left\{\varphi' z(fz)^3\frac{dz}{dx}\right\}}{dx^2}$$

⋮

et en général

$$\frac{d^n.\varphi z}{dy^n} = \frac{d^{n-1}\left[\varphi' z(fz)^n\frac{dz}{dx}\right]}{dx^{n-1}}$$

et, en posant $y=0$, d'où $z=x$ et $\frac{dz}{dx}=1$,

$$\left(\frac{d^n . \varphi z}{dy^n}\right)_{y=0} = \frac{d^{n-1}\left[\varphi' x \, (fx)^n\right]}{dx^{n-1}}$$

Reportant enfin, on aura

$$\varphi z = \varphi x + \frac{y}{1}\varphi' x . fx + \frac{y^2}{1.2}\frac{d\left[\varphi' x\,(fx)^2\right]}{dx} + \frac{y^3}{1.2.3}\frac{d^2\left[\varphi' x\,(fx)^3\right]}{dx^2} + \cdots \quad (B)$$

Rem. Les formules (A) et (B) sont évidemment susceptibles de s'étendre à des fonctions implicites de deux ou plusieurs variables indépendantes.

La formule (A) s'applique à la résolution des Équations tant algébriques que transcendantes, sous la condition qu'elle conduise à une série convergente.

Soit par exemple

$$z = x + k z^m$$

une Éq. d'où l'on veut tirer la valeur de z en x, ordonnée suivant les puissances de k. La formule (A) donnera

$$z = x + \frac{k}{1}x^m + \frac{k^2}{1.2}.2mx^{2m-1} + \frac{k^3}{1.2.3}.3m(3m-1)x^{3m-2} + \cdots$$

et si l'on posait $\varphi(z) = z^n$, on tirerait de la formule (B)

$$z^n = x^n + \frac{k}{1}nx^{m+n-1} + \frac{k^2}{1.2}n(2m+n-1)x^{2m+n-2} + \frac{k^3}{1.2.3}n(3m+n-1)(3m+n-2)x^{3m+n-3} + \cdots$$

Voir Lagrange (Équations).

Soit encore

$$z = x + e \sin z$$

qui est celle du Problème de Képler.

La formule (A) donnera immédiatement

$$z = x + \frac{e}{1}\sin x + \frac{e^2}{1.2}\frac{d.\sin^2 x}{dx} + \frac{e^3}{1.2.3}\frac{d^2.\sin^3 x}{dx^2} + \cdots$$

Formule très-convergente, car e est très-petit.

Enfin, en astronomie et Physique Mathématique, on a besoin de développer

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xy+y^2}}$$

suivant les puissances ascendantes de y. La Série de Lagrange permet de le faire avec beaucoup d'élégance.

Posons en effet

$$\sqrt{1-2xy+y^2} = 1 - yz \qquad (1)$$

d'où

$$1-2xy+y^2 = 1+y^2z^2-2yz$$

$$z = x + \tfrac{1}{2}y(z^2-1)$$

Prenant $f(z) = \frac{1}{2}(z^2-1)$, on pourra développer z.

Maintenant, si l'on différentie (1) en x, on trouve

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-2xy+y^2}}$$

Donc, ce n'est que $\frac{dz}{dx}$, au lieu de z, qu'il faut avoir. Or la Série (A), différentiée, donne

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{y}{1}\,\frac{d.f(x)}{dx} + \frac{y^2}{1.2}\,\frac{d^2.(fx)^2}{dx^2} + \frac{y^3}{1.2.3}\,\frac{d^3.(fx)^3}{dx^3} + \dots$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xy+y^2}} = 1 + \frac{y}{1.2}\,\frac{d.(x^2-1)}{dx} + \frac{y^2}{1.2.2^2}\,\frac{d^2.(x^2-1)^2}{dx^2} + \dots + \frac{y^n}{1.2\dots n.2^n}\,\frac{d^n.(x^2-1)^n}{dx^n} + \dots$$

(Cournot).

Deux problèmes de Maximum.

1er. Problème. — Un Disque m, posé sur une Table horizontale AB, est éclairé par une lampe F, dont le pied B est fixé à une distance invariable du disque m, mais que l'on peut hausser ou baisser suivant la verticale BF. On demande à quelle hauteur on peut la fixer pour que le disque m reçoive la plus grande clarté possible. — On regarde comme des quantités très-petites et négligeables les dimensions du disque et du foyer lumineux par rapport à la distance qui les sépare, et l'on sait d'ailleurs, par la théorie et l'expérience, que l'intensité de la lumière projetée par un point lumineux sur un élément de surface est en raison directe du sinus de l'angle que les rayons lumineux font avec la surface, et en raison inverse du carré de la distance de l'élément éclairé au point lumineux.

Soit a la distance invariable mB, x l'angle variable BmF, $\rho = \frac{a}{\cos x}$ la distance mF, $f(x)$ l'intensité de la lumière projetée sur le disque, A l'intensité de la lumière qu'il recevrait sous l'incidence perpendiculaire des rayons et à une distance du foyer égale à l'unité linéaire: on aura

$$f(x) = \frac{A \sin x}{\rho^2} = \frac{A}{a^2} \sin x \cos^2 x$$

L'Equation $f'(x) = 0$ devient dans ce cas

$$\cos^3 x - 2 \cos x \sin^2 x = 0$$

et se décompose en

$$\cos x = 0 \qquad \operatorname{tg} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

on a ensuite

$$f''(x) = \frac{A}{a^2} (9 \sin^2 x - 7) \sin x$$

La Solution $\cos x = 0$ donne

$$f(x) = 0, \quad \sin x = \pm 1, \quad f''(x) = \pm \frac{2A}{a^2}$$

Les valeurs négatives de x ou de $\sin x$ donneraient pour $f(x)$ des valeurs négatives, et sont étrangères à la question telle qu'on l'a posée, bien qu'on puisse admettre par convention que les valeurs de $f(x)$ seront positives ou négatives selon que le disque sera éclairé par sa surface supérieure ou par sa surface inférieure. En écartant donc les solutions négatives, on voit que la solution $\cos x = 0$ correspond à un minimum. Effectivement, il est manifeste que si l'on élève indéfiniment le foyer lumineux, l'intensité de la lumière projetée sur le disque s'affaiblit indéfiniment : donc il ne s'agit ici que d'un minimum mathématique, impossible à réaliser physiquement.

La solution

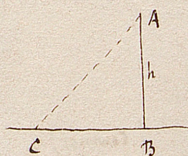
$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

la seule qui nous intéresse, donne

$$f(x) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{A}{a^2}, \quad f''(x) = -\frac{4}{\sqrt{3}} \frac{A}{a^2}$$

et correspond au maximum cherché.

2°. Problème. — Quand on veut mesurer la hauteur h d'une ligne verticale AB, on mesure à partir du pied de la verticale, une distance horizontale $BC = b$; on observe l'angle $BCA = x$, et l'on a



$$h = b \operatorname{tg} x$$

Cela posé, il s'agit de savoir quelle doit être la base arbitraire b, de manière qu'on forme le triangle le plus avantageux, c.à.d. celui qui est tel qu'à une même erreur sur l'angle x corresponde l'erreur minimum sur la hauteur cherchée h.

Si, au lieu d'observer exactement l'angle x, on observe un angle $x + \Delta x$ qui en diffère peu, la valeur qu'on en conclura pour la hauteur cherchée pourra s'exprimer par $h + \Delta h$, et l'on aura sensiblement :

$$\Delta h = \frac{d(b\,\mathrm{tg}\,x)}{dx}\,\Delta x = \frac{b}{\cos^2 x}\,\Delta x$$

Donc, pour que le rapport de l'erreur Δh sur la valeur calculée, à l'erreur d'observation Δx, soit un minimum, il faut que la vraie valeur de l'angle x et celle de la base b qui en dépend rendent un minimum le facteur

$$\frac{b}{\cos^2 x}$$

c.à.d.

$$\frac{h}{\mathrm{tg}\,x\,\cos^2 x}$$

Le problème revient donc à rendre un maximum la fonction

$$f(x) = \mathrm{tg}\,x\,\cos^2 x = \sin x \cos x$$

or on a

$$f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad . \quad f''(x) = -4\sin x \cos x$$

Donc le maximum cherché correspond à

$$\sin x = \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad b = h$$

C'est la règle pratique que l'on découvre pour ainsi dire instinctivement, mais dont le calcul seul peut donner une démonstration rigoureuse.

La solution

$$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

n'aurait géométriquement aucun sens.

(Cournot)

597

Calcul des Perturbations des Planètes.
(Puiseux).

E. Mauduit

Des Perturbations des Planètes.

Notre But est de donner une idée Rapide de la manière dont on calcule les perturbations qu'éprouve le mouvement elliptique des Planètes par suite des actions mutuelles qu'elles exercent les unes sur les autres.

Comme on peut supposer que la masse de chaque planète est Réunie tout entière en son centre de Gravité, on voit que le problème se Réduit à ceci :

La loi de l'attraction en Raison inverse du carré de la distance étant supposée vraie universellement, détermi[ner] le mouvement des différents points, de masses connues, qui circulent autour du Soleil, et s'attirent tous les uns les autres.

Les lois de ce mouvement se déduisent de l'intégrati[on] d'un système d'Equations différentielles, après que l'obs[er]vation directe a permis de déterminer les constantes introduites par l'intégration même.

Le problème est fort compliqué, mais il le serait bien davantage encore si, pour la double Raison que les corps célestes sont sensiblement sphériques et qu'ils sont très-éloignés les uns des autres Relativemt. à leurs dimen-sions Respectives, on ne pouvait les supposer Réduits à leurs centres de Gravité, coïncidant sensiblemt. avec leurs centres de figure.

Soit M la masse du Soleil, soient m, m', m'' ... les masses des diverses planètes. — Prenons

trois axes rectangulaires quelconques, et appelons X, Y, Z les coordonnées du Soleil, ξ, η, ζ ; ξ', η', ζ' ; etc. celles des planètes m, m', etc. — Et supposons que tous les satellites des planètes qui en possèdent leur soient réunis, de sorte que nous en ferons abstraction complètement.

J'appelle f l'attraction que l'unité de masse exerce sur l'unité de masse à l'unité de distance.

Je cherche d'abord les composantes de la force accélératrice à laquelle est soumis le Soleil M. — Soit pour cela

$$\begin{cases} Mm = r \\ Mm' = r' \\ Mm'' = r'' \\ \text{etc.} \end{cases} \quad \begin{cases} mm' = \rho_{0,1} \\ mm'' = \rho_{0,2} \\ \text{etc.} \end{cases} \quad \begin{cases} m'm = \rho_{1,0} \\ m'm'' = \rho_{1,2} \\ \text{etc.} \end{cases} \quad \text{etc.}$$

La force accélératrice qui s'exerce sur M, de la part de m, c'est $\frac{fmM}{r^2}\cdot\frac{1}{M}$ ou $\frac{fm}{r^2}$. — Sa composante suivt l'axe des x sera donc $\frac{fm(\xi - X)}{r^3}$. De même pour les autres axes et pour les autres planètes m', m'', etc.

On aura donc, pour le Soleil,

$$\begin{cases} \frac{d^2X}{dt^2} = \frac{fm(\xi - X)}{r^3} + \frac{fm'(\xi' - X)}{r'^3} + \text{etc.} \\ \frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{fm(\eta - Y)}{r^3} + \frac{fm'(\eta' - Y)}{r'^3} + \text{etc.} \\ \frac{d^2Z}{dt^2} = \frac{fm(\zeta - Z)}{r^3} + \frac{fm'(\zeta' - Z)}{r'^3} + \text{etc.} \end{cases}$$

Puis, de même, pour les autres planètes,

$$\begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{fM(\xi - X)}{r^3} + \frac{fm'(\xi' - \xi)}{\rho_{0,1}^3} + \frac{fm''(\xi'' - \xi)}{\rho_{0,2}^3} + \text{etc.} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{fM(\eta - Y)}{r^3} + \frac{fm'(\eta' - \eta)}{\rho_{0,1}^3} + \frac{fm''(\eta'' - \eta)}{\rho_{0,2}^3} + \text{etc.} \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\frac{fM(\zeta - Z)}{r^3} + \frac{fm'(\zeta' - \zeta)}{\rho_{0,1}^3} + \frac{fm''(\zeta'' - \zeta)}{\rho_{0,2}^3} + \text{etc.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2\xi'}{dt^2} = -\frac{fM(\xi' - X)}{r'^3} + \frac{fm(\xi - \xi')}{\rho_{0,1}^3} + \frac{fm''(\xi'' - \xi')}{\rho_{1,2}^3} + \text{etc.} \\ \frac{d^2\eta'}{dt^2} = - \text{ etc.} \\ \frac{d^2\zeta'}{dt^2} = - \text{ etc.} \end{cases}$$

etc.

ainsi, on le voit, on a trois équations pour chaque planète. — On pourra donc déterminer toutes les coordonnées en fonction du temps : — du moins on conçoit théoriquement la possibilité de cette détermination.

Mais, comme nous ne connaissons aucun point fixe dans l'espace auquel nous puissions rapporter le mouvement absolu du Soleil et des planètes, — ce ne sont point les mouvements absolus de ces corps qu'il est important de déterminer, mais bien leurs mouvements relatifs par rapport à l'un d'eux, le Soleil par exemple, considéré comme un point immobile.

Imaginons donc par le centre du Soleil trois axes rectangulaires parallèles aux précédents, et appelons, par rapport à ces nouveaux axes, $x\,y\,z$, $x'y'z'$ $x''y''z''$, etc. les coordonnées respectives des diverses planètes m, m', m'', etc. — on aura évidemment

$$\xi = X + x \qquad \eta = Y + y \qquad \zeta = Z + z$$
$$\xi' = X + x' \qquad \eta' = Y + y' \qquad \zeta' = Z + z'$$
$$\xi'' = X + x'' \qquad \eta'' = Y + y'' \qquad \zeta'' = Z + z''$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

et il est clair que les distances respectives des planètes s'expriment au moyen de ces nouvelles coordonnées relatives aux axes mobiles. — ainsi l'on a

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \rho_{0,1} = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$$
$$r' = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} \qquad \rho_{2,3} = \sqrt{(x''-x''')^2+(y''-y''')^2+(z''-z''')^2}$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

nous conserverons cependant ces lettres r et ρ pour plus de commodité.

Cherchons ce que deviennent les équations précédentes quand on y introduit les nouvelles coordonnées. En faisant les substitutions, nous trouvons



Pour le Soleil

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dt^2} = \dfrac{fmx}{r^3} + \dfrac{fm'x'}{r'^3} + \text{etc.} \\ \dfrac{d^2Y}{dt^2} = \dfrac{fmy}{r^3} + \text{etc.} \\ \dfrac{d^2Z}{dt^2} = \dfrac{fmz}{r^3} + \text{etc.} \end{cases}$$

Pour le point m

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dt^2} + \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{fMx}{r^3} + \dfrac{fm'(x'-x)}{\rho_{0,1}^3} + \dfrac{fm''(x''-x)}{\rho_{0,2}^3} + \text{etc.} \\ \dfrac{d^2Y}{dt^2} + \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{fMy}{r^3} + \dfrac{fm'(y'-y)}{\rho_{0,1}^3} + \text{etc.} \\ \dfrac{d^2Z}{dt^2} + \dfrac{d^2z}{dt^2} = -\dfrac{fMz}{r^3} + \dfrac{fm'(z'-z)}{\rho_{0,1}^3} + \text{etc.} \end{cases}$$

Pour le point m'

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dt^2} + \dfrac{d^2x'}{dt^2} = -\dfrac{fMx'}{r'^3} + \dfrac{fm(x-x')}{\rho_{0,1}^3} + \dfrac{fm''(x''-x')}{\rho_{1,2}^3} + \text{etc.} \\ \dfrac{d^2Y}{dt^2} + \dfrac{d^2y'}{dt^2} = - \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

etc.

Il y a toujours autant d'équations que d'inconnues. Mais maintenant, comme nous ne cherchons pas les coordonnées absolues X, Y, Z du Soleil, nous les éliminons par des soustractions, et il nous reste

Pour le point m

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{f(M+m)x}{r^3} + fm'\left(\dfrac{x'-x}{\rho_{0,1}^3} - \dfrac{x'}{r'^3}\right) + \text{etc.} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{f(M+m)y}{r^3} + fm'\left(\dfrac{y'-y}{\rho_{0,1}^3} - \dfrac{y'}{r'^3}\right) + \text{etc.} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -\dfrac{f(M+m)z}{r^3} + \text{etc.} \end{cases}$$

Pour le point m'

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x'}{dt^2} = -\dfrac{f(M+m')x'}{r'^3} + fm\left(\dfrac{x-x'}{\rho_{0,1}^3} - \dfrac{x}{r^3}\right) + \text{etc.} \\ \dfrac{d^2y'}{dt^2} = - \text{etc.} \\ \dfrac{d^2z'}{dt^2} = - \text{etc.} \end{cases}$$

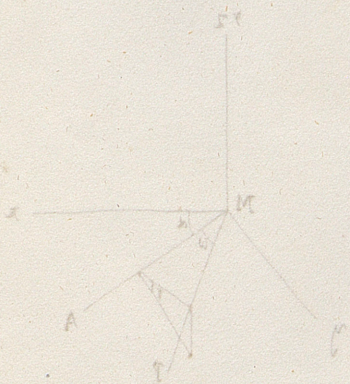
etc.

Ces équations ne contiennent plus que les coordonnées relatives des différents points, par rapport aux axes mobiles qui ont leur origine au centre du Soleil. — S'il y a n planètes, ces dernières équations sont au nombre de 3n.

Ce sont ces équations qu'on se propose d'intégrer. Il n'y a pas pour cela de méthode générale. — On peut trouver sept intégrales premières, mais, pour résoudre complètement le problème dans le cas général il faut avoir recours à des méthodes d'approximation. On se fonde pour cela sur ce que les masses des planètes sont extrêmement petites par rapport à la masse du Soleil (La masse de Jupiter, la plus grosse des planètes, n'est pas $\frac{1}{1000}$ de celle du Soleil). — Donc, dans les seconds membres des équations que nous avons à traiter, les premiers termes sont de beaucoup les plus considérables. On peut donc, dans une première approximation, négliger tous les autres termes en ne conservant que les premiers, et il vient

Pour le point m

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{f(M+m)x}{r^3} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{f(M+m)y}{r^3} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -\dfrac{f(M+m)z}{r^3} \end{cases}$$



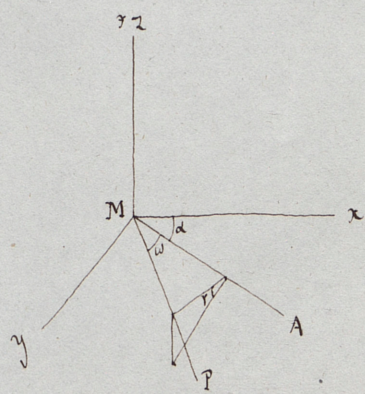
Pour le point m'

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x'}{dt^2} = -\dfrac{f(M+m')x'}{r'^3} \\ \dfrac{d^2y'}{dt^2} = -\dfrac{f(M+m')y'}{r'^3} \\ \dfrac{d^2z'}{dt^2} = -\dfrac{f(M+m')z'}{r'^3} \end{cases}$$

etc.

alors le problème est extrêmement simplifié. — Car, dans le cas général, chaque système de trois équations contenait en même temps les coordonnées de toutes les planètes. Mais maintenant, les 3 premières équations ne contiennent que les coordonnées de la planète m, les 3 suivantes que celles de la planète m', et ainsi de suite. En d'autres termes, ce sont les équations qu'on obtiendrait pour chaque planète en ne faisant attention qu'à l'attraction qui s'exerce entre elle et le Soleil, et négligeant complètement les actions mutuelles des diverses planètes les unes sur les autres, de façon qu'on pourra déterminer séparément le mouvement de chacune d'elles. — En effet, nous savons intégrer par exemple les trois premières équations. Ce sont celles du mouvement absolu d'un point de masse $M+m$, attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance. Il est facile de trouver $x\ y\ z$ en fonction du temps t. Nous savons que ce mouvement se fait dans un plan, qu'il est elliptique, et que les aires décrites par le rayon vecteur du point m sont proportionnelles au temps.

Nous ne ferons pas le calcul : il est partout. Indiquons seulement les résultats. — Le Soleil M étant l'origine des coordonnées, on prend pour plan des xy le plan de l'Écliptique. — Soit MA la trace sur le plan xy du plan de l'ellipse décrite par la planète m. Soit α l'angle AMx compté dans le sens que l'on suit quand on marche des x positives vers les y positives. On sait que le plan de l'ellipse diffère peu de celui de l'Écliptique, avec lequel les plans des orbites planétaires font tous des angles très-petits. Soit γ cet angle pour la planète m, l'angle du plan qu'elle décrit, avec le plan des xy. — On sait aussi que toutes les planètes se meuvent dans le même sens. — Enfin MA est dirigé dans le sens du nœud ascendant de l'orbite de



Si l'on négligeait λ, on trouverait pour α, γ, ω, a, e, c des valeurs constantes : et l'on retomberait sur les équations du mouvement elliptique des planètes. — Or tel n'est pas notre but. — Mais remarquons que, puisque les dérivées $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$, ... sont extrêmement petites, il s'ensuit qu'à une époque quelconque les quantités α, γ ... elles-mêmes diffèrent très-peu de leurs valeurs initiales. Si donc α_0 γ_0 ω_0 ... sont ces valeurs initiales à une époque donnée prise pour origine du temps, leurs valeurs à une époque quelconque en seront très-peu différentes, et nous pourrons poser

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_0 + \lambda\alpha_1 \\ \gamma = \gamma_0 + \lambda\gamma_1 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha'_0 + \lambda\alpha'_1 \\ \gamma' = \gamma'_0 + \lambda\gamma'_1 \\ \vdots \end{cases}$$

etc.

α_0, γ_0 ... α'_0 γ'_0 ... étant donnés par l'observation, et $\alpha_1, \gamma_1, \ldots \alpha'_1, \gamma'_1 \ldots$ étant de nouvelles quantités inconnues à déterminer en fonction du temps.

Je substitue maintenant ces valeurs dans $P, Q, \ldots$ alors, P deviendra $p_0 + \lambda P_1$, p_0 désignant ce qu'on obtiendrait en substituant dans P, $\alpha_0, \gamma_0 \ldots$ à $\alpha, \gamma \ldots$ et λP_1 étant une forme sous laquelle on peut mettre évidemment l'ensemble des autres termes. — De même $Q = q_0 + \lambda Q_1$, etc.

Les équations à intégrer deviennent alors

$$\lambda \frac{d\alpha_1}{dt} = \lambda p_0 + \lambda^2 P_1$$

ou

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_1}{dt} = p_0 + \lambda P_1 \\ \frac{d\gamma_1}{dt} = q_0 + \lambda Q_1 \\ \text{etc.} \end{cases}$$

et de même pour les autres planètes. —

à présent, α_1, γ_1, etc. sont aisés à trouver par approximation. Car, dans les dernières équations, on peut, aux seconds membres, négliger les derniers termes, et l'on a

$$\begin{cases} \alpha_1 = \int_0^t p_0\, dt \\ \gamma_1 = \int_0^t q_0\, dt \\ \text{etc.} \end{cases}$$

par de simples quadratures.

Veut-on une approximation plus grande ? — on posera

$$\begin{cases} \alpha_1 = \int_0^t p_0\, dt + \lambda \alpha_2 \\ \gamma_1 = \int_0^t q_0\, dt + \lambda \gamma_2 \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Je substitue ces valeurs dans $P_1, Q_1, \ldots$ Le résultat de la substitution se compose de deux parties : celle qu'on obtiendrait en remplaçant $\alpha_1, \gamma_1 \ldots$ par $\int_0^t p_0 dt$, $\int_0^t q_0 dt \ldots$ seulement ; et une autre de l'ordre de λ. De façon qu'on pourra poser

$$P_1 = p_1 + \lambda P_2$$
$$Q_1 = q_1 + \lambda Q_2$$
$$\text{etc.}$$

Si l'on substitue ces valeurs et celles exactes de $\alpha_1, \gamma_1 \ldots$ dans les équations à intégrer prises sous leur dernière forme, elles deviendront

$$\frac{d\alpha_1}{dt} \text{ ou } p_0 + \lambda \frac{d\alpha_2}{dt} = p_0 + \lambda p_1 + \lambda^2 P_2$$

ou bien

$$\text{et} \quad \begin{cases} \frac{d\alpha_2}{dt} = p_1 + \lambda P_2 \\ \frac{d\gamma_2}{dt} = q_1 + \lambda Q_2 \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Si on néglige les derniers termes des seconds membres, ces équations donnent

x y et z en fonction de t. — Ces 6 valeurs ne peuvent il est vrai s'écrire explicitement. Mais cela ne fait absolument rien : on n'en pourra pas moins pour chaque valeur de t, calculer x, y et z avec autant d'approximation que l'on voudra. Nous avons donc bien réellement x, y et z en fonction de t et de six constantes introduites par l'intégration et déterminées par l'expérience, qui sont

$$\alpha, \gamma, \omega, a, e, c.$$

Pour une autre planète m' on aura de même x', y' et z' en fonction de t et de six nouvelles constantes

$$\alpha', \gamma', \omega', a', e', c'.$$

et ainsi de suite.

Voilà quelle serait la solution du problème si l'on négligeait les actions mutuelles des planètes les unes sur les autres. Comme alors le mouvement de chacune d'elles se fait rigoureusement suivant une ellipse, les six constantes $\alpha, \gamma, \omega, a, e, c$ sont appelées les éléments du mouvement elliptique des planètes.

Cherchons maintenant à déterminer le mouvement des planètes avec plus d'exactitude.

Pour cela, supposons x y et z toujours exprimés par les mêmes formules que dans le mouvement elliptique mais seulement regardons $\alpha, \gamma, \omega, a, e, c$ non plus comme des constantes, mais comme des fonctions du temps inconnues et que nous allons tâcher de trouver. Il est bien clair que cette hypothèse nous est toujours permise. Car une expression telle que celle-ci

$\varphi(t, \alpha, \gamma, \omega, a, e, c)$, où les quantités $\alpha, \gamma \dots$ sont des fonctions arbitraires du temps, peut être identifiée à une fonction donnée du temps quelle qu'elle soit

et cela, d'une infinité de manières. — La question que nous nous proposons est donc complètement indéterminée. Car, pour que l'identification dont nous parlions tout-à-l'heure fût possible, il suffirait qu'une seule des constantes fût fonction arbitraire du temps, et alors, par cette identification même, on déterminerait complètement cette fonction. — Or, au lieu d'une fonction arbitraire du temps, nous nous en donnons six, qui entrent dans trois équations : c'est donc trois de trop pour chaque planète. En d'autres termes, nous nous donnons $6i$ inconnues, et il n'y a pour les déterminer que $3i$ équations. —

Nous pourrons donc profiter de cette indétermination du problème, et faire en sorte que les trois valeurs de x, y et z conservent la même forme qu'elles avaient quand α, γ.. étaient de simples constantes. Quelles sont les équations de condition, que nous pouvons nous donner au nombre de $3i$, que nous poserons pour cela ? — Soit

$$x = F(t, \alpha, \gamma, \omega, a, e, c)$$

Quand les quantités α, γ.. sont des constantes, $\frac{dx}{dt}$ est égal simplement à $\frac{dF}{dt}$. — Mais, maintenant que nous les considérons comme des fonctions du temps, alors nous aurons

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dt} + \frac{dF}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{dF}{d\gamma}\cdot\frac{d\gamma}{dt} + \dots + \frac{dF}{dc}\frac{dc}{dt}$$

Si nous voulons que x conserve, en fonction du temps, la même forme qu'il avait tout-à-l'heure, il faut que sa dérivée par rapport à t conserve aussi une forme identique : cela est assez évident. — Il nous faudra donc, en raisonnant de même pour y et z, poser les équations de condition

Marginal pencil notes: $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$; $= \frac{dx}{dt}$

609

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{da}\frac{da}{dt} + \frac{dx}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dt} + \cdots + \frac{dx}{dc}\frac{dc}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{da}\frac{da}{dt} + \cdots\cdots + \frac{dy}{dc}\frac{dc}{dt} = 0 \\ \frac{dz}{da}\frac{da}{dt} + \cdots\cdots + \frac{dz}{dc}\frac{dc}{dt} = 0 \end{array}\right.$$

etc.

equations qui sont bien au nombre de $3i$. – Le problème devient alors déterminé. –

Voyons maintenant ce que deviendront les trois équations exactes du mouvement pour la planète m quand on y portera toutes ces conditions. – Puisque

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dt}$$

on a

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2F}{dt^2} + \frac{d^2F}{da\,dt}\cdot\frac{da}{dt} + \cdots + \frac{d^2F}{dc\,dt}\frac{dc}{dt}, \\ \text{et} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2F_1}{dt^2} + \text{etc.} \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2F_2}{dt^2} + \text{etc.} \end{array}\right.$$

Remarquons en outre que, puisque $x = F(t, a \ldots)$ dans le mouvem^t. elliptique, on a

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d^2F}{dt^2} = -\frac{f(M+m)x}{r^3} \\ \frac{d^2F_1}{dt^2} = -\frac{f(M+m)y}{r^3} \\ \frac{d^2F_2}{dt^2} = -\frac{f(M+m)z}{r^3} \end{array}\right.$$

Par la substitution de ces valeurs, les équations exactes pour la planète m deviennent

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d^2x}{da\,dt}\frac{da}{dt} + \frac{d^2x}{d\gamma\,dt}\frac{d\gamma}{dt} + \cdots + \frac{d^2x}{dc\,dt}\frac{dc}{dt} = A'm' + A''m'' + \text{etc.} \\ \frac{d^2y}{da\,dt}\frac{da}{dt} + \frac{d^2y}{d\gamma\,dt}\frac{d\gamma}{dt} + \cdots + \frac{d^2y}{dc\,dt}\frac{dc}{dt} = B'm' + B''m'' + \text{etc.} \\ \frac{d^2z}{da\,dt}\frac{da}{dt} + \frac{d^2z}{d\gamma\,dt}\frac{d\gamma}{dt} + \cdots + \frac{d^2z}{dc\,dt}\frac{dc}{dt} = C'm' + C''m'' + \text{etc.} \end{array}\right.$$

Ces trois équations, jointes aux trois autres qui sont écrites en haut de cette même page, me donnent

610

Six Equations entre les six nouvelles variables $\alpha, \gamma \ldots c$. Dans ces Equations, les quantités analogues à $\frac{dx}{d\alpha}$ et à $\frac{d^2x}{d\alpha\, dt}$ sont connues, puisque x est supposé avoir la même forme que dans le mouvement Elliptique. – Ces Six Equations ne contiennent donc réellement que les Six Dérivées du 1er ordre $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \ldots \frac{dc}{dt}$, au premier degré, et ne se multipliant pas entre elles, puis $\alpha, \gamma \ldots c$ d'une manière quelconque, enfin le temps t. – On pourra donc Résoudre ces Six Equations par Rapport à ces Six Dérivées premières, et l'on aura

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d\alpha}{dt} = H'm' + H''m'' + \text{etc.} \\ \frac{d\gamma}{dt} = K'm' + K''m'' + \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

$H', H'' \ldots K', K'' \ldots$ contenant $t, \alpha, \gamma, \omega, a, e, c$.

Pour Rendre les Raisonnements plus faciles, je remarque que les masses $m', m'' \ldots$ des planètes sont très-Petites, si on les Rapporte à la masse du Soleil. Si donc on Désigne par λ une quantité de même ordre que ces masses $m, m' \ldots$, et égale à $\frac{1}{1000}$ environ, les Equations précédentes pourront s'écrire ainsi

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d\alpha}{dt} = \lambda P \\ \frac{d\gamma}{dt} = \lambda Q \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

$P, Q, \ldots$ étant des quantités finies, fonctions de t, de $\alpha, \gamma, \ldots c$. – Et nous aurons ainsi Six Equations pour chaque planète, donc en tout autant d'Equations que d'inconnues. – Toutes ces Equations doivent être prises toutes ensemble, et non pas de Six par Six par Systèmes séparés.

Maintenant, ces equations sont faciles à Intégrer par approximation. – Voici comment.

611

$$\begin{cases} \alpha_2 = \int_0^t p_1\, dt \\ \gamma_2 = \int_0^t q_1\, dt \\ \text{etc.} \end{cases}$$

et ainsi de suite, aussi loin qu'on le voudra.

En réunissant ces résultats, on trouvera donc

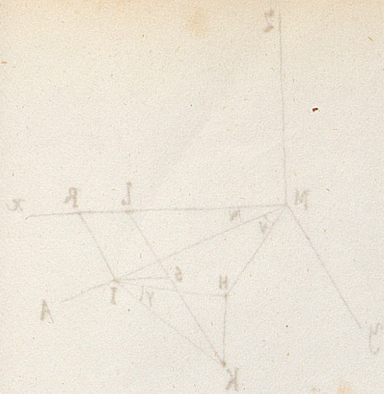
$$\begin{cases} \alpha = \alpha_0 + \lambda \int_0^t p_0 dt + \lambda^2 \int_0^t p_1\, dt + \lambda^3 \int_0^t p_2 dt + \text{etc.} \\ \gamma = \gamma_0 + \lambda \int_0^t \gamma_0 dt + \lambda^2 \int_0^t \gamma_1 dt + \lambda^3 \int_0^t \gamma_2\, dt + \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

$p_0, p_1, p_2, \ldots\ q_0, q_1, q_2, \ldots$ étant des fonctions du temps et des valeurs initiales des constantes. — On aura donc $\alpha, \gamma \ldots$ avec autant d'approximation que l'on voudra. — Par suite on pourra à une époque quelconque calculer les coordonnées d'une planète avec telle degré d'exactitude que l'on désirera.

Le procédé que nous venons d'exposer est évidemt. général, et peut servir à intégrer par approximation un système quelconque d'équations simultanées si l'on a déjà un système de valeurs approchées des inconnues.

Rem. — à chaque instant, on peut regarder la planète m comme se trouvant sur une certaine ellipse, qui change de place avec le temps. — Mais, comme les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ restent les mêmes dans les mouvemt. réel et dans le mouvemt. elliptique, quand $\alpha, \gamma, \ldots$ sont fonctions du temps et quand elles sont constantes, il s'ensuit que la tangente à la courbe réellemt. décrite coïncide toujours avec la tangente

au même point à l'Ellipse sur laquelle la planète peut être supposée se mouvoir à ce même instant. Ces deux courbes sont donc perpétuellement tangentes: la courbe du mouvement réel est l'enveloppe des positions de l'Ellipse mobile.



la planète m. — au périhélie de la planète m, son rayon vecteur forme avec la ligne OA un angle que j'appelle ω, et dont la valeur détermine le grand axe de l'ellipse de la planète. — Soit c le temps où la planète passe au périhélie. — Toutes ces quantités, α, γ, ω, c, ainsi que le demi-grand-axe a et l'excentricité e, étant supposées données par l'observation, on peut, par l'intégration des équations différentielles, arriver à des équations finies qui déterminent complètement et sans ambiguïté aucune le mouvement de la planète. — Ces équations sont, si l'on appelle r le rayon vecteur de la planète, u un angle tel qu'on ait $r = a(1 - e \cos u)$, et n un coefficient égal à $\sqrt{\frac{f(M+m)}{a^3}}$, — sont dis-je les suivantes

$$r = a(1 - e \cos u)$$

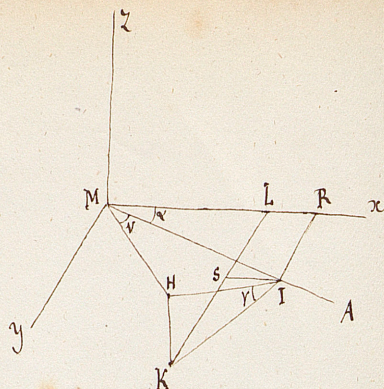
$$n(t - c) = u - e \sin u$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos(v - \omega)}$$

v étant l'angle que fait à chaque instant avec OA le rayon vecteur de la planète.

D'après cela, il est alors facile d'avoir x y et z en fonction du temps. — Pour cela, il faut exprimer ces coordonnées x y et z en fonction de r et de v et des quantités connues α, γ, ω, c, a et e. — Cela est aisé. — Soit H une position quelconque de la planète. Du point H j'abaisse une perpendiculaire HK sur le plan des xy. Du pied K de cette perpendiculaire, j'abaisse, dans le plan des xy, une autre perpendiculaire KL sur l'axe ox. Du même point K, dans le plan des xy, j'abaisse aussi une perpendiculaire KI sur la direction MA du nœud ascendant de la planète. — Si je joins HI,

cette droite HI sera évidemment perpendiculaire sur MA. — Enfin, par le point I je mène IR perpendiculaire sur Mx et IS parallèle à Mx. — on aura évidemment



$$\begin{cases} x = MR - LR = MR - IS \\ y = KL = IR + KS \\ z = HK \end{cases}$$

or le triangle MHI, rectangle en I, donne

$$MI = MH \cdot \cos HMI$$
$$= r \cos v$$

et

$$HI = r \sin v$$

Le triangle MIR, rectangle en R, donne

$$MR = MI \cos \alpha$$
$$= r \cos v \cos \alpha$$
$$IR = r \cos v \sin \alpha$$

Le triangle HKI, rectangle en K, donne

$$KI = HI \cos \gamma$$
$$= r \sin v \cos \gamma$$
$$HK = r \sin v \sin \gamma$$

Le triangle KIS, rectangle en S, donne

$$IS = IK \cos SIK = IK \sin \alpha$$
$$= r \sin v \cos \gamma \sin \alpha$$
$$KS = r \sin v \cos \gamma \cos \alpha$$

Reportant toutes ces valeurs dans les expressions de x, y et z, on trouve

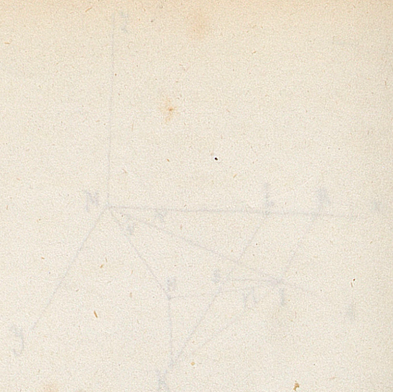
$$\begin{cases} x = r \cos v \cos \alpha - r \sin v \cos \gamma \sin \alpha \\ y = r \cos v \sin \alpha + r \sin v \cos \gamma \cos \alpha \\ z = r \sin v \sin \gamma \end{cases}$$

on a donc x, y, z en fonction de r et de v, et de quantités connues. D'ailleurs on a r et v en fonction de t par l'élimination de u dans les trois équations précédentes. — Donc on peut avoir



[illegible]

$$\begin{cases} x = MA - LA = MB - IS \\ y = KL = IB + KS \\ z = NK \end{cases}$$



Dans le triangle NMI, rectangle en I, on a

$$MI = MN \cos NMI$$

$$= r \cos v$$

$$NI = r \sin v$$

Le triangle MIB, rectangle en B, donne

$$MB = MI \cos \alpha$$

$$= r \cos v \cos \alpha$$

$$IB = r \cos v \sin \alpha$$

Le triangle NKI, rectangle en K, donne

$$KI = NI \cos \gamma$$

$$= r \sin v \cos \gamma$$

$$NK = r \sin v \sin \gamma$$

Le triangle KIS, rectangle en S, donne

$$IS = KI \cos SIK = KI \sin \alpha$$

$$= r \sin v \cos \gamma \sin \alpha$$

$$KS = r \sin v \cos \gamma \cos \alpha$$

Il suffit de remplacer dans les expressions de x, y [illegible]

$$\begin{cases} x = r \cos v \cos \alpha - r \sin v \cos \gamma \sin \alpha \\ y = r \cos v \sin \alpha + r \sin v \cos \gamma \cos \alpha \\ z = r \sin v \sin \gamma \end{cases}$$

[illegible] x, y, z en fonction de r et de v, et [illegible] [illegible]

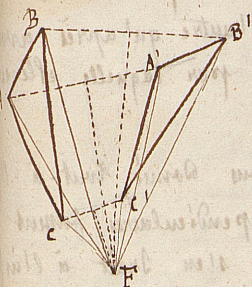
Mouvement d'un corps solide entièrement libre dans l'espace. –

Nous commencerons par quelques principes sur le déplace-ment en lui-même d'un corps solide quelconque, indépendamment des forces qui le sollicitent. Ce sont en réalité quelques théorèmes de simple Géométrie que nous allons établir préalablement.

Considérons d'abord le cas le plus simple, celui du mouvement d'une figure plane dans son plan.

Théorème.

Etant données deux positions quelconques d'une même figure plane dans son plan, on peut toujours l'amener de la première position à la seconde en la faisant tourner autour d'un certain point du plan.



Prenons pour exemple un triangle. – Soient ABC, $A'B'C'$ deux de ses positions. Joignons AA' et au milieu élevons-lui une perpendiculaire de même joignons BB' et ..... Ces deux perpendiculaires se coupent en un point F. Je dis que le triangle ABC peut être amené à coïncider avec $A'B'C'$ par une simple rotation autour du point F.
En effet, joignons FA, FB, FA', FB'. Nous formerons deux triangles FAB et $FA'B'$ qui, il est aisé de le voir, sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux. – Donc les angles en A et en A' de ces triangles sont égaux. Donc les angles CAF et $C'A'F$ sont aussi égaux. Donc, si je joins FC et FC', j'aurai deux triangles FCA et $FC'A'$ égaux comme ayant un angle égal $A = A'$ compris entre côtés égaux.
D'après cela, on voit ce qui aura lieu si le triangle ABC tourne autour du point F. Quand il aura tourné de façon que AB s'applique sur $A'B'$, le point C viendra de lui-même en C', et

les deux figures coïncideront.

Si au lieu d'un triangle on avait un quadrilatère, le quatrième sommet D' viendrait également en D, et ainsi de suite.

Ainsi, étant données deux positions quelconques d'une même figure plane dans son plan, on peut toujours l'amener de la première position à la seconde par une simple rotation autour d'un certain point, et, pour avoir ce point, il suffit de joindre deux couples de points homologues des deux positions, et de prendre le point de rencontre des perpendiculaires élevées sur les milieux des deux droites de jonction ainsi obtenues.

On déduit de là cette propriété :

Théorème.

Si deux figures dans un plan sont directement égales, les perpendiculaires élevées au milieu des droites qui joignent les couples de points homologues des deux figures, vont toutes concourir en un même point du plan.

Remarque. — J'ai dit « deux figures directement égales » et non pas simplement « deux figures égales ». C'est qu'en effet il y a deux espèces d'égalités : 1°. l'Egalité Directe, celle de deux figures dont l'une peut être amenée à coïncider avec l'autre par un simple mouvement dans le plan ; 2°. l'Egalité Inverse, celle de deux figures qui dont l'une ne peut être ramenée à coïncider avec l'autre qu'après avoir subi un retournement qui change la face par laquelle elle est appliquée sur le plan.



(2) et (3), Egalité Directe
(1) et (2), Egalité Inverse

Dans l'énoncé général que nous avions donné tout-à-l'heure, il pourrait se faire que toutes les perpendiculaires fussent parallèles entre elles, auquel cas le point F s'en irait à l'infini. Mais alors les droites AA', BB', CC' etc. seraient parallèles et l'une des figures pourrait être amenée sur l'autre par un simple mouvement de translation.

Il suit de là que tout déplacement infiniment petit d'une figure dans son plan peut être regardé comme effectué par une rotation de la figure autour d'un certain point de ce même plan. — En effet, la figure ABC passant en A'B'C', dans

ses points décrivent de petits arcs quelconques AA', BB', CC', ..
Mais nous venons de démontrer que la figure peut passer de la première position à la seconde par une rotation autour d'un point F convenablement déterminé. Les arcs de cercles que décrivent les points A, B, C, .. pendant cette rotation infiniment petite, ne différeront que par des infiniment petits du second ordre des arcs qu'ils décrivent réellement, et l'on peut par conséquent confondre le mouvement réel avec une rotation autour du point F. – Mais ce point F change de place continuellement, et n'est centre de rotation que pendant un temps infiniment petit. C'est lui qu'on appe le Centre Instantané de Rotation.

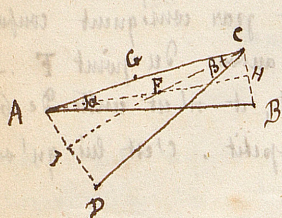
Passons maintenant à quelques propositions relatives aux rotations successives infiniment petites d'un corps solide quelconque autour de divers axes parallèles entre eux. – J'entends par rotation infiniment petite d'un corps autour d'un axe un mouvement de rotation autour de cet axe faisant tourner le corps d'une quantité angulaire infiniment petite.

Théorème.

Si un corps subit deux rotations successives infiniment petites autour de deux axes parallèles, ces deux rotations peuvent être remplacées par une seule autour d'un axe parallèle aux deux premiers, et la position de ce nouvel axe et la grandeur de la rotation se déterminent comme le point d'application et la grandeur de la résultante de deux forces parallèles.

ainsi : supposons que le corps ait tourné autour du premier axe d'un angle infinimt. petit α, autour du second, d'un angle β : je dis que ces deux mouvements équivalent à une rotation unique autour d'un troisième axe parallèle aux deux premiers ; que la grandeur de cette rotation est $\alpha + \beta$ si les deux rotations primitives sont de même sens, et que de plus si, sur les directions des deux premiers axes, on porte des longueurs proportionnelles à α et à β considérées comme des forces, qu'on cherche la résultante de ces forces, le point d'application de cette résultante sera un point par où passera l'axe de la rotation résultante.

La démonstration est facile. Supposons les deux premiers axes perpendiculaires au papier, et le perçant aux points A et B. [~~Soient A, B et C trois points de la section par le papier, invariablement liés au corps. Je puis alors me borner à considérer ce qui se passe dans le plan de la figure, et à considérer les rotations du triangle ABC autour des points A et B.~~] — Je fais d'abord tourner la figure d'un angle α autour de A. Le point B arrive en C, et AC = AB. L'axe de la seconde rotation est donc venu en C: et c'est autour du point C que le corps subit une seconde rotation β de même sens que la première. Alors A vient en D, CA en CD, et CD = AB. — Ainsi, le point A est venu en D, et B en C. — Imaginons la section de la figure par le plan du papier. J'aurais pu l'amener de la première position à la seconde par une simple rotation autour d'un certain point: donc aussi le corps pourra passer directement de la première position à la dernière par une rotation autour d'un axe parallèle aux premiers. — Tout se réduit donc à trouver, sur le plan du papier, le centre instantané de rotation de la droite AB passant en DC. Employons pour cela la construction connue. H et I étant les milieux de CB et AD, AH et CI sont perp. sur CB et AD, et le point F est le point cherché. C'est donc autour de l'axe passant en F et perp. au plan du papier que devra avoir lieu la rotation résultante. L'angle de cette rotation résultante est l'angle AFD ou son égal CFB. — Or



$$\text{angle } AFD = 2AFI = 2(FAC + FCA) = 2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$$

$$\text{angle } AFD = \alpha + \beta$$

Donc déjà l'angle de la rotation résultante est égal à la somme des angles des deux rotations composantes: et cette relation est vraie même quand les rotations ne sont pas infiniment petites. — Reste à trouver à la limite la position du point F. — Or on a

$$\frac{AF}{FC} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

à la limite, le point F vient en un certain point G sur AC, et l'on a

$$\frac{AG}{CG} = \frac{\beta}{\alpha}$$

ainsi le point G divise AC en deux parties réciproquement proportionnelles à α et à β ; ce qui démontre bien le théorème.

J'ai supposé que les deux rotations α et β étaient de même sens. Elles peuvent être de sens contraires : c'est absolument la même chose.

On passe de là à la composition d'un nombre quelconque de rotations ~~autour~~ infiniment petites autour d'axes parallèles. – Il est inutile de répéter l'énoncé du théorème dans ce cas général.

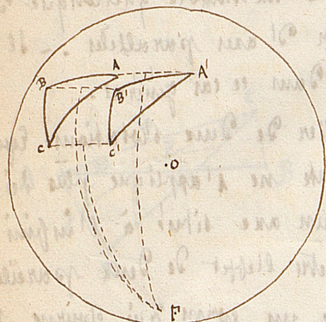
Il y a à examiner le cas particulier de deux rotations égales et de sens contraires. La règle précédente ne s'applique plus ici ; elle donnerait une rotation nulle autour d'un axe situé à l'infini. Il faut donc examiner à part quel peut être l'effet de deux pareilles rotations successives. — Supposons donc un corps qui tourne successivement et en sens contraires d'un même angle α autour de deux axes A et B. alors A arrive en D et B en C. Le corps n'a fait évidemment que se déplacer parallèlement à lui-même. Ainsi ainsi l'action de deux rotations égales et de sens contraires autour de deux axes parallèles, action que l'on peut appeler un <u>couple de rotation</u>, se réduit à une translation du corps sur lequel elle agit. — Reste à voir quelles sont, à la limite, la direction et la grandeur de cette ~~direction~~ translation. – Or, à la limite, CB devient perpendiculaire à AB. Donc la direction de cette translation est perpendiculaire au plan des deux axes parallèles. — Donc un couple de rotation produit une translation perpendiculaire à son plan, en appelant plan du couple de rotation le plan des deux axes parallèles autour desquels se font les deux rotations. — De plus, pour la grandeur de cette translation, on a évidemment $CB = a\alpha$. Ce produit $a\alpha$ peut être désigné par le mot de moment du couple de rotation. Donc le moment d'un couple de rotation est égal à son angle multiplié par la distance de ses deux axes parallèles.

$AB = a$

À présent, on peut établir une théorie toute semblable pour les déplacements d'un corps solide quelconque mobile autour d'un point fixe.

Soit O le point fixe autour duquel se meut le corps solide.

Je dis que ce corps peut être amené d'une quelconque de ses positions à une seconde non moins quelconque par une Rotation autour d'un certain axe passant par le point o. — En effet du point o comme centre avec un rayon quelconque je décris surface sphérique, sur laquelle je prends au hasard trois points que je considère comme liés invariablement au corps. — Je suppose que, dans une seconde position de ce corps, A vienne en A', B en B' et C en C'. Je dis que le corps peut être amené par la première position à la seconde par une Rotation autour d'un axe passant par le point o. — Pour le démontrer, il suffit de prouver que le triangle sphérique ABC peut être amené à coïncider avec le triangle sphérique A'B'C' par une rotation autour d'un point de la sphère dont ils font partie. Et ce point se détermine en joignant AA' et BB' par des arcs de grands cercles, élevant au milieu des arcs de jonction des arcs de grands cercles perpendiculaires, et prenant l'intersection de ces deux arcs. — Il n'y a pas un mot à changer à la démonstration pour les figures planes. — Considérons donc ce point comme démontré. — Le point F ainsi déterminé, il est clair que la droite Fo sera l'axe autour duquel, par une simple Rotation, le corps passerait de la première à la seconde de ses positions.



Donc, quand un corps se meut autour d'un point fixe d'une manière quelconque, un de ses déplacements infiniment petits peut, à des infiniment petits du second ordre près, être regardé comme coïncidant avec une Rotation autour d'un axe passant par le point fixe, axe que l'on appelle <u>axe instantané de Rotation</u>. —

Théorème.

<u>Si l'on fait subir à un corps deux Rotations successives infiniment petites autour de deux axes passant par un point fixe o, le déplacement qui en résultera pourra être produit par une seule Rotation autour d'un axe op passant par le même point, et la direction de cet axe et la grandeur de la Rotation résultante s'obtiennent comme la direction et l'intensité</u>

De la Résultante de deux forces qui passent par un même point.

Supposons deux Rotations, d'angles α et β, et de même sens, autour des axes OA et OB, qui coupent en A et B une sphère quelconque dont O est le centre. Je mène l'arc de grand cercle AB. — Par la Rotation α, AB vient en AC, de manière que l'angle $BAC = \alpha$. Par la Rotation β, AC vient en CD, et l'angle $ACD = \beta$. Le point A est venu en D, et B en C. — Donc AB aurait pu venir en CD par une seule Rotation autour du point F. — L'angle AFD est donc l'angle de la Rotation Résultante par laquelle le corps tournant autour de OF aurait passé de la première position à la seconde. Soit γ cet angle AFD. &c. Je cherche ce que deviennent à la limite le point F et l'angle γ. — Je Remarque que

$$\text{angle } FAC = \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\text{"} \quad FCA = \tfrac{1}{2}\beta$$

$$\text{"} \quad AFI = \tfrac{1}{2}\gamma$$

Le triangle AFC donne alors (en appelant α,γ par ex. l'angle des deux axes des rotations α et γ)

$$\sin(\alpha,\gamma) : \sin(\beta,\gamma) : \sin(\alpha,\beta) :: \sin\frac{\beta}{2} : \sin\frac{\alpha}{2} : \sin\frac{\gamma}{2}$$

Supposons maintenant que les Rotations deviennent infiniment petites, le point F arrivera en un certain point de AC, en G, et l'on aura

$$\sin(\alpha,\gamma) : \sin(\beta,\gamma) : \sin(\alpha,\beta) :: \beta : \alpha : \gamma$$

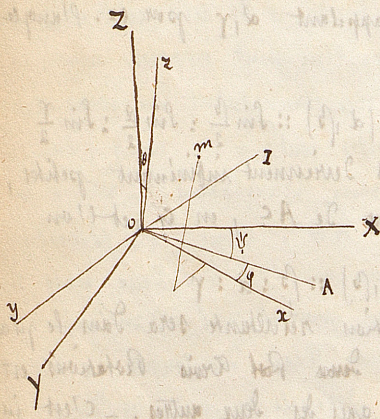
Donc, à la limite, l'axe de la Rotation résultante sera dans le plan des deux autres. De plus, chacune des trois Rotations est proportionnelle au sinus de l'angle des axes des deux autres. — C'est justement la même chose que dans la composition des forces. Donc, si, à partir du point O, on porte sur OA et sur OB des longueurs OM et ON proportionnelles à α et à β, et si l'on cherche la Résultante de ces deux longueurs considérées comme des forces, la longueur OP sera la valeur de la Rotation Résultante γ, et son axe sera la droite OF elle-même. — C.q.f.d.

De là on passe aisément à la composition d'un nombre quelconque de Rotations successives infiniment petites autour d'axes passant par un point fixe. Cette composition se fait absolument comme celle d'un nombre quelconque de forces concourantes. —

Réciproquement, une Rotation quelconque infiniment petite peut être décomposée en plusieurs autres Rotations infiniment petites autour d'axes passant par un même point de l'axe de la Rotation primitive.

En particulier, on pourra toujours décomposer une Rotation inf. pte en trois autres autour de trois axes Rectangulaires passant par un même point de l'axe de cette rotation, et alors, si ω est cette Rotation primitive, et si α, β et γ sont les angles que fait son axe avec les trois axes Rectangulaires, ces trois Rotations composantes seront $\omega \cos\alpha$, $\omega \cos\beta$ et $\omega \cos\gamma$.

Ces principes étant posés, nous pouvons facilement trouver les Equations du mouvement d'un corps solide quelconque autour d'un point fixe : — et si ensuite on détermine le mouvement de translation de ce point, on connaîtra complètement le mouvement d'un corps solide entièrement libre dans l'espace. —



Soient OX, OY, OZ trois axes rectangulaires fixes passant par le point fixe O. — Imaginons trois autres axes ox, oy et oz rectangulaires aussi et passant par le point o, et mais liés invariablement au corps et emportés par lui dans son mouvement de Rotation. Il est clair que les coordonnées d'un point quelconque du corps par Rapport à ces nouveaux axes sont fixes. Soient $x\ y\ z$ les coordonnées d'un point m qcq. par Rapport à ces axes mobiles. — Le déplacement infiniment petit du corps pendant le temps dt peut être Regardé comme une Rotation autour d'un certain axe passant par le point o, à des infinim. petites du second ordre près. Soit OI cet axe instantané de Rotation pour l'époque. Le déplacemt. inf. petit du corps dans le temps dt consiste donc dans une Rotation autour de OI. J'appelle ωdt l'angle infiniment petit de cette Rotation : ω est la vitesse de cette Rotation, rapportée à l'unité de temps. — Cette rotation peut se décomposer en trois autres suivant les trois axes θ mobiles ox, oy et oz. Je Représente les trois composantes par

$$p\,dt \quad q\,dt \quad r\,dt$$

($p\ q\ r$. étant les produits de ω par les cosinus des angles que fa

l'axe instantané OI avec les axes ox, oy, oz).

D'autre part, la position des axes mobiles par rapport aux axes fixes pourra être à chaque instant déterminée par la connaissance de trois angles qui seront les suivants : — Soit OA la trace du plan xoy sur XOY. J'appelle ψ l'angle XOA

" φ " xoA

" θ " Zoz

ce dernier angle θ étant aussi l'angle dièdre des deux plans xoy et XOY.

Cela posé, pour trouver les équations du mouvement du corps autour du point o, il me suffit de trouver trois relations entre le temps et les angles ψ, φ et θ. — Ce n'est pas ainsi que je vais opérer. Je vais considérer les quantités p q et r comme des inconnues auxiliaires, utiles pour la commodité des calculs, et je vais chercher trois équations entre le temps et les six quantités ψ, φ, θ, p, q, r. — Puis, j'établirai par des considérations géométriques trois autres relations entre ces six quantités. —

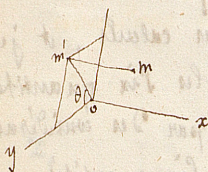
Occupons-nous d'abord de la recherche des trois premières équations, comme si les quantités p, q, r étaient connues. —

À chaque instant, il y a équilibre entre les forces réellement appliquées au corps et celles qui, prises en sens contraires, donneraient à chaque point supposé libre le mouvement qu'il a réellement. — Je vais exprimer cet équilibre par des équations. — Or, le corps est mobile autour du point o. — Donc, pour l'équilibre, il faut et il suffit que la somme des moments des forces qui se font équilibre soit nulle par rapport à trois axes rectangulaires passant par le point o. — Je vais exprimer que ces moments sont nuls par rapport aux trois axes mobiles ox, oy, oz, dont la mobilité nous est pour cela parfaitement indifférente.

Ce qu'il importe d'avoir d'abord, ce sont les moments des forces effectives par rapport aux axes mobiles, et pour cela, il faut d'abord avoir leurs composantes suivant ces axes. — Pour avoir très la composante suivant ox de la force effective du point m à l'époque quelconque t, je chercherai quelle est sa vitesse

parallèle à ox à l'époque t, sa vitesse parallèle à ox à l'époque $t+dt$, je prendrai la différence, et je la diviserai par dt : j'aurai ainsi la composante suivant ox de la force accélératrice du point m : — cela résulte de ce que cette composante est en général $\frac{d^2x}{dt^2}$ ou $\frac{d\frac{dx}{dt}}{dt}$. — Il faut apporter une certaine attention à ce calcul, attendu que les axes ox oy oz sont mobiles.

Considérons donc les axes ox, oy, oz comme fixes pendant le temps dt, et cherchons quelles sont les variations que subissent les coordonnées x, y, z par le déplacement infiniment petit du corps. — Ce déplacement, nous l'avons dit, peut être remplacé par les trois rotations pdt, qdt, rdt autour des axes ox, oy, oz. Prenons d'abord la première rotation pdt autour de ox. Que deviennent par cette rotation x y et z ? D'abord, x ne change pas. — Ensuite : j'appelle pour un moment θ l'angle $m'oy$, et ρ la distance om' : $\delta\theta$ sera égal à pdt. — J'aurai



$$y = \rho \cos\theta$$
$$z = \rho \sin\theta$$

d'où

$$\delta_1 y = -\rho \sin\theta \, \delta\theta = -pz\,dt$$
$$\delta_1 z = \rho \cos\theta \, \delta\theta = py\,dt$$

ainsi, par la rotation infiniment petite pdt autour de ox, j'ai pour les accroissements des coordonnées,

$$\begin{cases} \delta_1 x = 0 \\ \delta_1 y = -pz\,dt \\ \delta_1 z = py\,dt \end{cases}$$

Pour les signes, il y a à observer que p sera compté comme positif lorsque le corps aura tourné de y vers z ; q sera de même positif quand le corps aura tourné de z vers x ; r enfin sera positif quand le corps aura tourné de x vers y. — Maintenant, si le corps tourne autour de oy de la quantité qdt, j'aurai pareillement pour les accroissements correspondants des coordonnées les expressions suivantes (obtenues en remplaçant dans les précédentes chaque lettre p, x, y, z par la suivante)

$$\begin{cases} \delta_2 x = qz\,dt \\ \delta_2 y = 0 \\ \delta_2 z = -qx\,dt \end{cases}$$

observation : — le corps avait déjà tourné autour de ox avant de tourner autour de oy, de sorte que x y et z avaient changé par là de quantités infiniment petites : et il est clair que cela n'altère que d'infiniment petits du second ordre les variations $\delta_2 x$, $\delta_2 y$ et $\delta_2 z$. — J'aurai enfin pour la troisième rotation

$$\begin{cases} \delta_3 x = -ry\,dt \\ \delta_3 y = rx\,dt \\ \delta_3 z = 0 \end{cases}$$

J'aurai donc pour les variations totales des coordonnées

$$\begin{cases} \delta x = (qz - ry)\,dt \\ \delta y = (rx - pz)\,dt \\ \delta z = (py - qx)\,dt \end{cases}$$

ayant ainsi les déplacements du point m parallèlement aux trois axes, en divisant par dt, j'aurai les composantes de sa vitesse suivant ces trois axes, à l'époque t. Si u, v et w désignent ces composantes, j'aurai

$$\begin{cases} u = qz - ry \\ v = rx - pz \\ w = py - qx \end{cases}$$

Maintenant, on pourrait croire au premier abord que $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ sont les composantes de la force accélératrice du point m. On se tromperait étrangement. Car u est la composante de la vitesse de m parallèle à ox à l'époque t ; u + du est la composante de la vitesse de m parallèle à la nouvelle position de ox à l'époque t + dt. La différence du est donc la différence de ces composantes qui n'ont pas même direction ; ce n'est donc pas l'accroissement de la vitesse parallèle à ox : et $\frac{du}{dt}$ n'est pas la composante suivant ox de la force accélératrice du point m. — Mais il est

facile de l'avoir. — En effet, à l'époque $t+dt$, ox, oy et oz sont devenus ox_1, oy_1 et oz_1 ; u, v, w sont les composantes de la vitesse à l'époque t suivant ox, oy et oz ; $u+du$, $v+dv$, $w+dw$ sont ses composantes à l'époque $t+dt$ suivant ox_1, oy_1 et oz_1. Comment avoir à l'époque $t+dt$ les composantes de la vitesse suivant ox, oy et oz ? — Cela est facile. — Ces composantes, on le sait, et d'ailleurs cela se voit presque immédiatement, sont

$$\begin{cases} (u+du)\cos(x_1,x) + (v+dv)\cos(y_1,x) + (w+dw)\cos(z_1,x) & \text{pour } ox \\ (u+du)\cos(x_1,y) + (v+dv)\cos(y_1,y) + (w+dw)\cos(z_1,y) & \text{" } oy \\ (u+du)\cos(x_1,z) + (v+dv)\cos(y_1,z) + (w+dw)\cos(z_1,z) & \text{" } oz \end{cases}$$

Reste à trouver ces neuf cosinus. — Pour cela, je prends sur ox une distance $oK = 1$. — Les coordonnées du point K sont $x=1$, $y=0$, $z=0$. Au bout du temps dt, le point K est venu en K_1 sur ox_1 et l'on a toujours $oK_1 = 1$. Les coordonnées de K_1 par rapport à ox oy oz seront les projections sur ces axes d'une longueur égale à l'unité comptée sur ox_1 : donc ces coordonnées seront les cosinus des angles $x_1 x$, $x_1 y$, $x_1 z$. — Or ces coordonnées s'obtiennent facilement. — Car en général on a

$$\begin{cases} \delta x = (qz - ry)\,dt \\ \delta y = (rx - pz)\,dt \\ \delta z = (py - qx)\,dt \end{cases}$$

Ici nous avons donc, puisque $x=1$, $y=0$, $z=0$,

$$\begin{cases} \delta x = 0 \\ \delta y = r\,dt \\ \delta z = -q\,dt \end{cases}$$

et par conséquent les coordonnées $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, ou les trois cosinus dont nous venons de parler, seront

$$\begin{cases} \cos x_1 x = 1 \\ \cos x_1 y = r\,dt \\ \cos x_1 z = -q\,dt \end{cases}$$

On trouve de même, et l'on obtient aussi par des changements de lettres

convenables les six autres cosinus

$$\begin{cases} \cos y,x = -r\,dt \\ \cos y,y = 1 \\ \cos y,z = p\,dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos z,x = q\,dt \\ \cos z,y = -p\,dt \\ \cos z,z = 1 \end{cases}$$

Les composantes de la vitesse au moment $t+dt$ suivant les axes ox, oy et oz sont donc, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\begin{cases} u + du - v\,r\,dt + w\,q\,dt & \text{pour } ox \\ v + dv - w\,p\,dt + u\,r\,dt & \text{"} \quad oy \\ w + dw - u\,q\,dt + v\,p\,dt & \text{"} \quad oz \end{cases}$$

Si, de ces composantes à l'époque $t+dt$, on retranche les composantes à l'époque t, et que l'on divise par dt, et qu'on multiplie par m, on aura les composantes des forces effectives du point m parallèlement à ox, oy et oz. Ce sont

$$\begin{cases} m\left(\frac{du}{dt} - vr + wq\right) & \text{pour } ox \\ m\left(\frac{dv}{dt} - wp + ur\right) & \text{"} \quad oy \\ m\left(\frac{dw}{dt} - uq + vp\right) & \text{"} \quad oz \end{cases}$$

On en déduit immédiatement les moments des forces effectives par rapport à ces trois axes mobiles : car, pour une force dont les composantes sont X, Y, Z, ces moments sont

$$\begin{cases} Zy - Yz & \text{pour l'axe } ox \\ Xz - Zx & \text{"} \quad oy \\ Yx - Xy & \text{"} \quad oz \end{cases}$$

ainsi, pour tous les points du corps, les trois sommes des moments des forces effectives par rapport aux trois axes mobiles ox, oy et oz seront

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma . m \left\{ y \left(\frac{dw}{dt} - uq + vp \right) - z \left(\frac{dv}{dt} - wp + ur \right) \right\} \\ \Sigma . m \left\{ z \left(\frac{du}{dt} - vr + wq \right) - x \left(\frac{dw}{dt} - uq + vp \right) \right\} \\ \Sigma . m \left\{ x \left(\frac{dv}{dt} - wp + ur \right) - y \left(\frac{du}{dt} - vr + wq \right) \right\} \end{array}\right.$$

Si maintenant on appelle L, M, N les sommes des moments de toutes les forces motrices par rapport aux trois axes mobiles ox, oy, oz, sommes qui doivent être connues en fonction de ψ, φ et θ, on aura pour les trois équations premières du mouvement du corps

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma . m \left\{ y \left(\frac{dw}{dt} - uq + vp \right) - z \left(\frac{dv}{dt} - wp + ur \right) \right\} = L \\ \Sigma . m \left\{ z \left(\frac{du}{dt} - vr + wq \right) - x \left(\frac{dw}{dt} - uq + vp \right) \right\} = M \\ \Sigma . m \left\{ x \left(\frac{dv}{dt} - wp + ur \right) - y \left(\frac{du}{dt} - vr + wq \right) \right\} = N \end{array}\right.$$

Ces équations se simplifient beaucoup quand on prend pour axes mobiles ox, oy et oz les trois axes principaux d'inertie correspondants au point o. — alors en effet, on a

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma . m\, yz = 0 \\ \Sigma . m\, xz = 0 \\ \Sigma . m\, xy = 0 \end{array}\right.$$

et de plus, si l'on appelle A, B, C les trois moments d'inertie du corps par rapport à ces trois axes principaux, on a

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma . m\, (y^2 + z^2) = A \\ \Sigma . m\, (z^2 + x^2) = B \\ \Sigma . m\, (x^2 + y^2) = C \end{array}\right.$$

d'où l'on tire

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma . m\, (y^2 - x^2) = A - B \\ \Sigma . m\, (z^2 - x^2) = A - C \\ \Sigma . m\, (z^2 - y^2) = B - C \end{array}\right.$$

Si maintenant, dans les trois dernières équations, nous rem-

plaçons u, v, w par leurs valeurs, et si nous réduisons en ayant égard aux relations qui expriment que ox, oy et oz sont des axes principaux d'inertie, nous trouverons, toutes réductions faites

$$\left\{\begin{array}{l} A\dfrac{dp}{dt} + (C-B)qr = L \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A-C)pr = M \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B-A)pq = N \end{array}\right.$$

Ces trois équations ne peuvent pas en général s'intégrer séparément. Car L, M et N, en général, contiennent toujours les angles ψ, φ et θ, puisque ce sont les moments des forces motrices par rapport aux axes mobiles ox, oy et oz. — On pourrait cependant les intégrer isolément s'il n'y avait pas de forces motrices, auquel cas les trois sommes L, M et N seraient nulles. —

Il nous reste maintenant à trouver trois équations entre les six quantités ψ, φ, θ, p, q, r. — C'est ce que l'on peut faire de plusieurs manières, soit par des considérations de trigonométrie sphérique, soit par le procédé suivant. — Je vais calculer de deux manières différentes les composantes de la vitesse par du point m parallèlement aux 3 axes fixes ox, oy, oz ; et j'exprimerai que les deux valeurs trouvées pour chaque composante sont égales quel que soit le point m.

D'abord, il est facile de trouver les coordonnées X, Y, Z du point m par rapport aux axes fixes. — En effet, soient

a, a', a''	les cosinus des angles de	ox	avec les axes fixes,
b, b', b''	" "	oy	" "
c, c', c''	" "	oz	" "

On aura

$$X = ax + by + c z$$
$$Y = a'x + b'y + c''z$$
$$Z = a''x + b''y + c''z$$

les neuf cosinus étant des fonctions connues des angles φ, ψ et θ (voir la transf. des coord. dans les préliminaires de la méca. de Duhamel

Les composantes de la vitesse du point m parallèles aux axes fixes sont donc

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= x\frac{da}{dt} + y\frac{db}{dt} + z\frac{dc}{dt} \\ \frac{dY}{dt} &= x\frac{da'}{dt} + y\frac{db'}{dt} + z\frac{dc'}{dt} \\ \frac{dZ}{dt} &= x\frac{da''}{dt} + y\frac{db''}{dt} + z\frac{dc''}{dt} \end{aligned}\right.$$

Ces composantes peuvent se trouver aussi en fonction de p, q, r. En effet, on a trouvé

$$\left\{\begin{aligned} u &= qz - ry \\ v &= rx - pz \\ w &= py - qx \end{aligned}\right.$$

Cela posé, la vitesse du point m parallèle à OX, c'est évidemment $u \cos(x, X) + v \cos(y, X) + w \cos(z, X)$ ou bien $au + bv + cw$. Et de même pour les autres composantes. Donc

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= au + bv + cw \\ \frac{dY}{dt} &= a'u + b'v + c'w \\ \frac{dZ}{dt} &= a''u + b''v + c''w \end{aligned}\right.$$

J'aurai donc les équations

$$\left\{\begin{aligned} au + bv + cw &= x\frac{da}{dt} + y\frac{db}{dt} + z\frac{dc}{dt} \\ a'u + b'v + c'w &= x\frac{da'}{dt} + y\frac{db'}{dt} + z\frac{dc'}{dt} \\ a''u + b''v + c''w &= x\frac{da''}{dt} + y\frac{db''}{dt} + z\frac{dc''}{dt} \end{aligned}\right.$$

Équations que, pour plus de commodité, je puis remplacer par trois autres résultant de leur combinaison. — Je remarque en effet que l'on a entre les neuf cosinus les relations

$$\left\{\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1 \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} ab + a'b' + a''b'' &= 0 \\ ac + a'c' + a''c'' &= 0 \\ bc + b'c' + b''c'' &= 0 \end{aligned}\right.$$

D'où l'on tire encore celles-ci

$$\begin{cases} a\,da + a'da' + a''da'' = 0 \\ b\,db + b'db' + b''db'' = 0 \\ c\,dc + c'dc' + c''dc'' = 0 \end{cases}$$

alors, je multiplie respectivement les trois Eq. par a, a', a'' et j'ajoute
puis " " " " b, b', b'' "
enfin " " " " c, c', c'' "
et je remplace ainsi ces trois équations par les suivantes

$$\begin{cases} u \text{ ou } qz - ry = y\dfrac{a\,db + a'db' + a''db''}{dt} + z\dfrac{a\,dc + a'dc' + a''dc''}{dt} \\ v \text{ ou } rx - pz = x\dfrac{b\,da + b'da' + b''da''}{dt} + z\dfrac{b\,dc + b'dc' + b''dc''}{dt} \\ w \text{ ou } py - qx = x\dfrac{c\,da + c'da' + c''da''}{dt} + y\dfrac{c\,db + c'db' + c''db''}{dt} \end{cases}$$

Ces trois Equations doivent avoir lieu pour toutes valeurs de x y z. on peut donc dans chacune d'elles égaler entre eux les deux coefficients d'une même inconnue x, y ou z dans les deux membres. on obtient ainsi les six Equations

$$\begin{cases} p = \dfrac{c\,db + c'db' + c''db''}{dt} = -\dfrac{b\,dc + b'dc' + b''dc''}{dt} \\ q = \dfrac{a\,dc + a'dc' + a''dc''}{dt} = -\dfrac{c\,da + c'da' + c''da''}{dt} \\ r = \dfrac{b\,da + b'da' + b''da''}{dt} = -\dfrac{a\,db + a'db' + a''db''}{dt} \end{cases}$$

Six équations qui se réduisent en réalité à trois. car les relations

$$\left.\begin{aligned} ab + a'b' + a''b'' &= 0 \\ bc + b'c' + b''c'' &= 0 \\ ca + c'a' + c''a'' &= 0. \end{aligned}\right\} \text{ donnent } \begin{cases} a\,db + a'db' + a''db'' = -(b\,da + b'da' + b''da'') \\ b\,dc + b'dc' + b''dc'' = -(c\,db + c'db' + c''db'') \\ c\,da + c'da' + c''da'' = -(a\,dc + a'dc' + a''dc'') \end{cases}$$

Reste maintenant, pour trouver p, q et r en fonction des trois angles φ, ψ et θ, à remplacer les neuf cosinus par leurs valeurs, et les différentielles de ces cosinus par les différentielles de leurs valeurs. Si l'on fait le calcul, qui n'offre d'ailleurs aucune difficulté, on trouve

$$\left\{\begin{array}{l} p = \cos\varphi \dfrac{d\theta}{dt} + \sin\varphi \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt} \\ q = -\sin\varphi \dfrac{d\theta}{dt} + \cos\varphi \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt} \\ r = \dfrac{d\varphi}{dt} + \cos\theta \dfrac{d\psi}{dt} \end{array}\right.$$

Equations auxquelles on pourrait arriver plus rapidement, mais par des méthodes plus longues à exposer.

Ces équations, avec celles que nous avions déjà trouvées, et qui sont

$$\left\{\begin{array}{l} A \dfrac{dp}{dt} + (C-B)\, qr = L \\ B \dfrac{dq}{dt} + (A-C)\, pr = M \\ C \dfrac{dr}{dt} + (B-A)\, pq = N \end{array}\right.$$

Déterminent complètement le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

Ces six équations différentielles simultanées sont du premier ordre. Leur intégration amènera six constantes. — Du reste, on ne sait effectuer cette intégration que dans des cas particuliers.

Un des cas particuliers les plus importants est celui où le corps n'est sollicité par aucune force. alors les trois dernières équations deviennent

$$\left\{\begin{array}{l} A \dfrac{dp}{dt} + (C-B)\, qr = 0 \\ B \dfrac{dq}{dt} + (A-C)\, pr = 0 \\ C \dfrac{dr}{dt} + (B-A)\, pq = 0. \end{array}\right.$$

elles ne contiennent point les angles φ, ψ, θ, et elles peuvent s'intégrer séparément.

En ajoutant ces trois équations après les avoir multipliées respectivement par p, q, r, on obtient

$$\frac{Ap\,dp + Bq\,dq + Cr\,dr}{dt} = 0$$

d'où, en multipliant par dt et intégrant

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h.$$

C'est à cette équation que conduirait l'application du principe des forces vives. — Car, puisqu'il n'y a pas de forces vives, ce principe donne

$$d\,\Sigma mv^2 = 0$$

ou

$$\Sigma mv^2 = h$$

ou

$$\Sigma . m(u^2 + v^2 + w^2) = h$$

or on a trouvé

$$\begin{cases} u = qz - ry \\ v = rx - pz \\ w = py - qx \end{cases}$$

Remplaçant, et observant que

$$\begin{cases} \Sigma mxy = 0 \\ \Sigma myz = 0 \\ \Sigma mxz = 0 \end{cases}$$

on trouvera

$$p^2\,\Sigma m(y^2+z^2) + q^2\,\Sigma m(x^2+z^2) + r^2\,\Sigma m(x^2+y^2) = h$$

ou

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h.$$

Une autre intégrale s'obtient en multipliant respectivement les trois équations par Ap, Bq, Cr. Il vient

$$\frac{A^2pdp + B^2qdq + C^2rdr}{dt} = 0$$

d'où

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K^2$$

Cette équation n'est autre chose que la conséquence du principe des aires. — En effet : Lorsqu'un corps solide est en mouvement autour d'un point fixe, les vitesses dont tous ses points sont animés à une époque quelconque pourraient être produites à ce moment par des forces instantanées, agissant sur le corps en repos dans cette position : et toutes ces forces, en vertu du point fixe, seraient réductibles à un couple. Ce couple est identique avec celui qui résulterait des

quantités de mouvement qui animent les différents points du corps. Si l'on décompose l'un et l'autre de ces couples en trois autres dont les axes soient dirigés suivant trois droites rectangulaires fixes les couples composants seront respectivement les mêmes. — Or le principe des aires apprend que, lorsqu'il n'y a pas de forces extér. les sommes des moments des quantités de mouvement, par rapport à trois axes fixes, sont constantes, et donnent par conséquent un moment constant dont l'axe a une direction constante. Les forces instantanées qui produiraient à chaque instant sur le corps en repos, dans la position qu'il occupe à cet instant, les vitesses qui ont lieu, sont donc réductibles à un couple qui a toujours même axe et même moment. Cherchons à déterminer cet axe et ce moment. — Considérons pour cela les quantités de mouvement dé-composées à un instant quelconque suivant les axes principaux d'i-nertie sur lesquels se comptent les x, y, z. — Les moments des couples auxquels elles donnent naissance auront pour expressions

$$\Sigma m(yw - zv) \qquad \Sigma m(zu - xw) \qquad \Sigma m(xv - yu)$$

Substituant les valeurs de u, v, w, on trouvera

$$\left\{ \begin{aligned} \Sigma m(yw - zv) &= Ap \\ \Sigma m(zu - xw) &= Bq \\ \Sigma m(xv - yu) &= Cr \end{aligned} \right.$$

Ces quantités ne sont pas constantes, parce que les axes des x, y, z ne sont pas fixes : mais la somme de leurs carrés est constante, puisque le moment résultant est constant. — Donc on retrouve bien l'équation

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K^2$$

Si, de ces deux équations

$$\left\{ \begin{aligned} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= h \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 &= K^2 \end{aligned} \right.$$

on tire p et q en fonction de r, — ce qui est facile et se fait ainsi :

$$\begin{cases} A(A-B)p^2 = k^2 - Bh + C(B-C)r^2 \\ B(A-B)q^2 = Ah - k^2 - C(A-C)r^2 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} p = \sqrt{\dfrac{k^2 - Bh + C(B-C)r^2}{A(A-B)}} \\ q = \sqrt{\dfrac{Ah - k^2 - C(A-C)r^2}{B(A-B)}} \end{cases}$$

et si l'on reporte ces valeurs dans la troisième des équations à intégrer, il vient

$$C\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{[k^2 - Bh + C(B-C)r^2][Ah - k^2 - C(A-C)r^2]}{AB}}$$

Équation différentielle entre r et t qui s'intégrera par une simple quadrature

$$dt = C\sqrt{AB}\,\frac{dr}{\sqrt{[k^2 - Bh + C(B-C)r^2][Ah - k^2 - C(A-C)r^2]}}$$

r est donc une fonction elliptique de t. – Pour chaque valeur de t, les tables des fonctions elliptiques donneront r, et par suite p et q.

Les quantités h et k se détermineront d'après la connaissance de l'état initial du corps et des vitesses initiales de ses divers points. En effet, on connaît alors les valeurs initiales des moments Ap, Bq, Cr : – donc on a p_0, q_0, r_0. D'où l'on conclut h et k.

Supposons, comme on peut toujours le faire,

$$A > B > C$$

La seconde des équations qui sont en haut de cette page montre que la quantité $Ah - k^2$ est essentiellement positive

$$Ah - k^2 > 0$$

La quantité $k^2 - Bh$ peut être positive ou négative, suivant les données initiales. Supposons-la aussi positive par exemple.

on aura donc

$$\begin{cases} Ah - k^2 > 0 \\ k^2 - Bh > 0 \end{cases}$$

[~~On voit alors que, r variant, p reste toujours positif sans jamais devenir nul : il est minimum et égal à $k^2 - Bh$ quand $r = 0$. En même temps, q reste aussi toujours positif, et descend jusqu'à zéro quand r atteint son maximum qui est~~

$$r^2 = \frac{Ah - k^2}{C(A-C)}$$

~~donné par la condition que $B(A-B)q^2$ est toujours positif.~~]

On voit alors que, r variant, p^2 n'atteint jamais zéro. Donc p garde toujours le même signe que p_0. Il est minimum et égal à $\sqrt{\frac{k^2 - Bh}{A(A-B)}}$ lorsque $r = 0$. — q^2 au contraire peut devenir nul, et par conséquent, q passera par zéro et changera de signe en général quand r passera par son maximum ou son minimum, donnés tous deux par la condition

$$r^2 < \frac{Ah - k^2}{C(A-C)}.$$

Ainsi, supposons p_0, q_0, r_0 positifs, et r allant d'abord en croissant. r devient maximum, alors q devient nul. r décroît alors, jusqu'à zéro, moment auquel p est minimum, q a changé de signe et est ~~pos~~ négatif. — r devient négatif et atteint son minimum ; q repasse par zéro et redevient positif. Et ainsi de suite. — p et q oscillent perpétuellement entre deux limites fixes, en passant par 0.

Les valeurs de p, q, r étant connues à chaque instant, on en déduit la vitesse de rotation instantanée

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2$$

et les cosinus

$$\frac{p}{\omega} \qquad \frac{q}{\omega} \qquad \frac{r}{\omega}$$

des angles que fait l'axe instantané de rotation avec les trois axes mobiles. —

Reste à connaître à chaque instant la position de ces axes mobiles eux-mêmes. C'est ce qui résulte de l'intégration des trois autres équations différentielles entre t, φ, ψ et θ.

Au lieu d'intégrer directement ces trois équations, nous allons nous servir de ce que nous avons déjà trouvé.

Mais d'abord, remarquons que, jusqu'à présent, les trois axes fixes ont été trois axes rectangulaires quelconques passant par le point O. On peut, en les particularisant, simplifier l'intégration. — Si l'on regarde chaque quantité de mouvement comme une force, et qu'on la transporte à l'origine, il en résulte un couple : et, en composant tous ces couples entre eux, on trouve un couple résultant dont l'axe est constant en grandeur et en direction. — Les couples composants de celui-ci suivant les trois plans principaux mobiles sont

$$Ap \quad Bq \quad Cr$$

Donc les moments des couples composants de ce couple résultant suivant les trois plans fixes ZOY, ZOX et XOY seront

$$aAp + bBq + cCr$$
$$a'Ap + b'Bq + c'Cr$$
$$a''Ap + b''Bq + c''Cr$$

et ces trois moments seront constants. — Si maintenant on prend pour axe des OZ l'axe, connu tout d'abord, du couple résultant des quantités de mouvement, les deux premiers de ces moments seront nuls, et le troisième sera égal au moment k de ce couple résultant lui-même. — Donc on aura

$$aAp + bBq + cCr = 0$$
$$a'Ap + b'Bq + c'Cr = 0$$
$$a''Ap + b''Bq + c''Cr = k$$

C'est de ces trois équations que je vais me servir pour déterminer φ, ψ et θ en fonction de p, q, r. — Cependant je remarque tout d'abord qu'elles ne suffisent pas : car, si l'on ajoute la somme de leurs carrés, on trouve $A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2$ relation indépendante de φ, ψ et θ. Donc ces trois équations ne

peuvent déterminer que deux de ces trois angles. — Je les multiplie respectivement par a, a', a'' et je les ajoute

puis " b, b', b'' "

puis " c, c', c'' "

J'aurai ainsi

$$\begin{cases} Ap = Ka'' \\ Bq = Kb'' \\ Cr = Kc'' \end{cases}$$

Remplaçons a'', b'' et c'' par leurs valeurs qu'on trouve partout, il vient

$$\begin{cases} Ap = K \sin\varphi \sin\theta \\ Bq = K \cos\varphi \sin\theta \\ Cr = K \cos\theta \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{Cr}{K} \\ \sin\varphi = \dfrac{Ap}{K\sin\theta} \\ \cos\varphi = \dfrac{Bq}{K\sin\theta} \end{cases} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{Ap}{Bq}$$

Reste à trouver l'angle ψ. — Pour cela, on reprend les équations à intégrer

$$\begin{cases} p = \dfrac{d\psi}{dt}\sin\theta\sin\varphi + \dfrac{d\theta}{dt}\cos\varphi \\ q = \dfrac{d\psi}{dt}\sin\theta\cos\varphi - \dfrac{d\theta}{dt}\sin\varphi \\ r = \dfrac{d\psi}{dt}\cos\theta + \dfrac{d\varphi}{dt} \end{cases}$$

On ajoute les deux premières après les avoir multipliées respectivement par $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$: il vient

$$p\sin\varphi + q\cos\varphi = \frac{d\psi}{dt}\sin\theta$$

Remplaçant $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ par leurs valeurs, j'aurai

$$\frac{d\psi}{dt}\sin\theta = \frac{Ap^2 + Bq^2}{K\sin\theta} = \frac{h - Cr^2}{K\sin\theta}$$

ou
$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{h - Cr^2}{K \sin^2\theta}$$

Mais $\cos\theta = \frac{Cr}{K}$, d'où $\sin^2\theta = 1 - \frac{C^2r^2}{K^2}$ et $K\sin^2\theta = \frac{K^2 - C^2r^2}{K}$

Donc
$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{K(h - Cr^2)}{K^2 - C^2r^2}$$

Si l'on remet maintenant pour dt sa valeur en fonction de r, on aura la valeur de $d\psi$ en fonction de r et dr. L'angle ψ sera donc connu en fonction de r, et par suite de t, par une intégration qui se réduit aux fonctions elliptiques, et pourra être effectuée exactement dans les mêmes cas que celle qui se rapporte à dt.

Le problème, dans le cas particulier qui nous occupe, peut donc être regardé comme complètement résolu au point de vue analytique. On voit qu'il n'y a que six intégrations à faire, tandis que nous avions six équations différentielles et par conséquent six constantes. Or nous ne retrouvons que quatre constantes; cela tient au choix particulier que nous avons fait de l'axe OZ lequel a rendus nuls les moments, en général égaux à une constante quelconque, des couples composants suivant ZX et ZY du couple résultant des quantités de mouvement.

Reste maintenant à expliquer comment on peut se représenter d'une manière plus sensible le mouvement du corps, toujours dans le cas particulier où il n'est sollicité par aucune force.

On sait que si l'on porte sur une droite quelconque menée par l'origine O une longueur égale à $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$, μ étant le moment d'inertie du corps par rapport à cette droite, le lieu des extrémités de ces droites est un ellipsoïde dont les axes sont les trois axes principaux d'inertie relatifs au point O, et dont l'équation, rapportée à ces axes, est par conséquent
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$
Nous appellerons cet ellipsoïde l'<u>Ellipsoïde central</u> du corps dont nous nous occupons: il suffit de déterminer le mouvement

de cet ellipsoïde pour avoir aussi celui du corps, auquel il est lié invariablement. — Or cet ellipsoïde jouit de la propriété remarquable de rester constamment tangent à un plan fixe parallèle au plan du couple résultant des quantités de mouvement. En effet : l'axe instantané perce cet ellipsoïde en un point I dont j'appelle x, y et z les coordonnées : ces coordonnées satisfont à la relation

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$$

car $p = \omega \cos\alpha = \omega \frac{x}{r}$ d'où $\frac{x}{p} = \frac{r}{\omega} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$. — Maintenant, je mène par le point I un plan tangent à l'ellipsoïde. Les cosinus de la normale à l'ellipsoïde au point I sont proportionnels aux trois dérivées

$$Ax \quad By \quad Cz$$

donc ils sont aussi proportionnels aux 3 quantités

$$Ap \quad Bq \quad Cr$$

Ces trois cosinus sont donc

$$\frac{Ap}{K} \quad \frac{Bq}{K} \quad \frac{Cr}{K}$$

Or ce sont justement là les cosinus des angles de l'axe du couple résultant avec les axes principaux. Ainsi la normale sus-dite est parallèle à cet axe : donc sa direction est constante. Donc le plan tangent au point I reste constamment tangent parallèle à un plan fixe, celui du couple résultant. — Mais de plus, ce plan tangent est lui-même absolument fixe. Il suffit pour le démontrer de faire voir que sa distance au point O est fixe. — Soit OH cette distance. L'Eq. du plan tangent en I est celle-ci

$$Ax\xi + By\eta + Cz\zeta = 1$$

et la longueur OH a pour valeur

$$OH = \frac{1}{\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}}$$

D'ailleurs, on peut facilement avoir x, y et z au moyen

des trois équations

$$\begin{cases} \frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} \\ Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \end{cases}$$

Le calcul se fait avec élégance : on a

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} = \frac{x\sqrt{A}}{p\sqrt{A}} = \frac{y\sqrt{B}}{q\sqrt{B}} = \frac{z\sqrt{C}}{r\sqrt{C}} = \frac{\sqrt{Ax^2+By^2+Cz^2}}{\sqrt{Ap^2+Bq^2+Cr^2}} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

d'où

$$\begin{cases} x = \frac{p}{\sqrt{h}} \\ y = \frac{q}{\sqrt{h}} \\ z = \frac{r}{\sqrt{h}} \end{cases}$$

Donc

$$OH = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}} = \frac{\sqrt{h}}{K}$$

Donc cette perpendiculaire est constante. — Donc <u>l'Ellipsoïde central est constamment tangent à un plan absolument fixe, parallèle à celui du couple résultant des quantités de mouvement</u>.

En outre, on voit que l'axe instantané est justement la droite menée du centre de l'Ellipsoïde à son point de contact avec ce plan fixe. Donc, à chaque instant, pendant le temps infiniment petit dt, l'Ellipsoïde ne fait que tourner autour de cet axe instantané qui reste immobile : de façon que l'Ellipsoïde roule sur ce plan fixe sans glisser sur lui. — Cela donne une idée complète et claire du mouvement du corps autour du point O.

La vitesse angulaire à chaque instant est

$$\omega = \sqrt{p^2+q^2+r^2} = \frac{p}{x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{h}\,.\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\omega = \overline{OI}\,.\sqrt{h}$$

Donc la vitesse angulaire de la rotation instantanée est à chaque instant proportionnelle à la droite menée du centre de l'Ellipsoïde à son point de contact avec le plan fixe.



